

६) किसी वृत्त के चाप के समान एक पुल का फैलाव १३२ गज है, यदि उसकी ऊँचाई ११ गज हो, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

यहाँ पुल का फैलाव उस चाप की पूर्णज्या है, जो पुल से बना है, तो

$$\text{व्यास} = \frac{\left(\frac{1}{2} \text{ पूर्णज्या} \right)^2}{\text{श}} + \text{श} = \left(\frac{66^2}{11} + 11 \right) \text{ गज}$$

$$= (6 \times 66 + 11) \text{ गज} = (396 + 11) \text{ गज} = 407 \text{ गज}।$$

$$\therefore \text{त्रिज्या} = \frac{407}{2} \text{ गज} = 203 \text{ गज} \text{ १ फी० ६ इंच}।$$

अभ्यासार्थ प्रश्न।

- (१) किसी वृत्त की त्रिज्या १० फी० और उसके एक चाप की ऊँचाई ४ फी० है, तो पूर्णज्या की लम्बाई बताओ।
- (२) किसी वृत्त का व्यास ३४ गज और उसके एक चाप की ऊँचाई ९ गज है, तो पूर्णज्या की लम्बाई बताओ।
- (३) किसी चाप की पूर्णज्या ३ इंच और वृत्त का व्यास ७ इंच है, तो उस चाप की ऊँचाई ५ दशमलव अंकों तक बताओ।
- (४) किसी चाप की ऊँचाई ४ इंच और उसकी पूर्णज्या १६ इंच है, तो वृत्त का व्यास बताओ।
- (५) किसी चाप की पूर्णज्या १२ फी० और उस चाप की ऊँचाई ३ फी० है, तो वृत्त का व्यास बताओ।
- (६) किसी चाप की पूर्णज्या २८ गज और उस चाप की ऊँचाई ४ गज है, तो वृत्त का व्यास बताओ।
- (७) किसी वृत्त का व्यास २५ फी० और उसका एक चापकीला २४ फी० है, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ।
- (८) एक वृत्त का व्यास २० इंच और उसका एक चापकीला १६ इंच है, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ।
- (९) किसी वृत्ताकार क्षील के किनारे में कोई नदी उस क्षील की व्यास रेखा पर २ माइल चल कर एक नृपति के कारण पहाड़ी दिशा के लम्बरूप दिशा में मुड़ गया। इसके बाद ६ माइल चलने पर वह नदी फिर किनारे पहुँच गया, तो क्षील की चौड़ाई बताओ।

व्याख्याकारः—

पण्डित श्रीलषणलालझा

(गणित-कलित-ज्योतिषाचार्य, ज्योतिषतीर्थ, साहित्य
वेदान्ताचार्य, सांख्य-योग सार्वी)

संशोधकः—

पण्डित श्रीसुरेशशर्मा एन० ए०

(गणित-कलित-ज्योतिषाचार्य)

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय

चौखम्बा विद्याभवन, वाराणसी-१

उपोद्धातः

रस्ये कर्णाटके देशे सद्यपर्वतसन्निधौ ।
 चीजापुरानिवशाने भूदेवस्य कुले तथा ॥ १ ॥
 पञ्चानलत्रयीतांशु (१०३३) सन्निधौ शाकहायने ।
 नहेऽवरमुतो जातो भास्करो लोकभास्करः ॥ २ ॥
 द्विसप्तदिग्निने (१०७२) शाके ग्रन्थोऽयं तेन निर्मितः ।
 विरसं सरसं कृत्वा सञ्चन्द्रोभिरलङ्कृतः ॥ ३ ॥
 'लीलावती' सप्तो ग्रन्थो गणिते नास्ति भूतले ।
 ग्रन्थोऽयं तेन सर्वत्र परीक्षासु प्रतिष्ठितः ॥ ४ ॥
 व्यक्तयार्थविधानेषु भास्कराद्योऽतिसंस्कृतः ।
 यस्यान्यासन नन्दोऽपि गणितज्ञो भविष्यति ॥ ५ ॥
 यद्यथस्य कृतार्थकाः सन्त्यनेकास्तथापि ताः ।
 नापयुक्ता विरोपेण छात्रेभ्यः सान्प्रतं तन्तु ॥ ६ ॥
 विचारैवं मुकुट्या हि टंकियं लिखिता मया ।
 तस्यां ग्रन्थकनादेव परिशिष्टानि सन्ति वै ॥ ७ ॥
 तत्रोदाहरणैः, सार्वं नवीनगणितस्य च ।
 रीतिः प्रदर्शिता येन, ज्ञानं तस्यापि जायतान् ॥ ८ ॥
 प्ररना बुद्धिविबुद्धयर्थं सन्त्यनेकाः मुक्तावहाः ।
 त्रिभुजादेः फलस्यापि गणितं तत्र प्रस्कृतम् ॥ ९ ॥
 अनया यदि छात्राणानुपकारो भवेत्तवु ।
 तदा ने श्रनसाकल्पयन्त्यथा विद्वलः श्रमः ॥ १० ॥
 ग्रनादाद् बुद्धिदोषाद्वा कष्टकान्तरजाऽपि वा ।
 या त्रुटिः सा वृथैः शोभ्या श्रमः स्वानाविक्रो वनः ॥ ११ ॥

इति विनीतो

लक्ष्मणलालः

भूमिका

इस ग्रन्थ के प्रणेता भारत-विभूति सर्वतंत्रस्वतंत्र देवब्रह्मकुल-रमल-प्रभाकर पण्डित श्री भास्कराचार्य हैं। इनका जन्म शक्रे १०२६ में कर्गाटक देशस्य सद्यः पर्वत के समीप बीजापुर गाँव में हुआ। ये वैष्णवसम्प्रदाय के कर्गाटक ब्राह्मण थे। इनके पिता का नाम महेश्वर था।

ग्रन्थकार बड़े ही समय में अपने पिता से पढ़कर अद्वितीय गणितज्ञ हो गये। ३६ वर्ष की अवस्था में उन्होंने 'सिद्धान्तशिरोमणि' की रचना की। एक ग्रन्थ में लीलावती, बीजगणित, गणिताध्याय एवं गोलाध्याय ये चार भाग हैं।

लीलावती पार्श्वगणित है। कुछ लोगों का कथन है कि ग्रन्थकार ने अपनी माया या लड़की के नाम पर ग्रन्थ का यह नाम रखा है। ग्रन्थकार के पुत्र पौत्रादि का अस्तित्व डाक्टर भास्कराजी के ताम्रपत्र से प्रमाणित होता है। शक्रे ११०५ में ग्रन्थकार ने 'करण कुतूहल' नाम का ग्रन्थ बनाया, इससे स्पष्ट है कि ३९ वर्ष से अधिक अवस्था में आचार्य का देहावसान हुआ।

प्रकृत ग्रन्थ का अनुवाद १५८० ई० में अकबर बादशाह की आज्ञा से फैजी ने फारसी में किया। १८१६ ई० में डेलर नाइव एवं १८१७ ई० में हेनरी-टान्स कोलब्रुक साइव ने अंग्रेजी में इस ग्रन्थ का अनुवाद किया। अतन्तर कई भाषाओं में भी इसका अनुवाद हुआ। गणित विषयक नौरत्न ग्रन्थ को ग्रन्थकार ने सरस काव्य का रूप दिया। इसके श्लोक बहुत सुन्दर और सरस हैं। व्याकरण, छन्द और अलंकार से अलंकृत होने से ग्रन्थ पढ़ने में बहुत आनन्द आता है। काव्य की आत्मा रस है और इनकी अनुभूति इसके पढ़ने से अनायास प्रतीत होती है।

ग्रन्थकार में ज्योतिष शास्त्र के अतिरिक्त आठों व्याकरण, दर्शन एवं साहित्य की विशिष्ट योग्यता थी। उनके ग्रन्थ में कई जगह ऐसे शब्द हैं जो पाणिनीय व्याकरण से सिद्ध नहीं होते। भाष्य के प्रति अक्षर नयुक्तिक और गिने हुये हैं। दूसरे मत का खण्डन करने का अवसर आचार्य को नहीं मिला है वहाँ बहुत सन्धता के साथ नयुर शब्दों में किया है। प्रकृत ग्रन्थ में एक जगह

संख्या है। नवीन गणितज्ञों ने प्रगणित में साठ-साठ भागवाली विजातीय संख्या के हिसाब को छोड़कर दशमलव की विधि चलायी।

विलोम विधि आर्यभट्ट से सूक्ष्म ब्रह्मगुप्त की है। ललावती ने ब्रह्मगुप्त की रीति है। ब्रह्मगुप्त का प्रमाण :—

गुणकरछेदरछेदो गुणको धननृगनृगधनं कार्यम् ।

वर्गः पदं पदं कृतिरन्त्याद्विपरीतमाद्यं तत् ॥

राशि में जहाँ राशि का हाँ कुछ अंश जोड़ा या घटाया गया हो, वहाँ विलोम विधि में क्या करना चाहिये, इसे केवल ग्रन्थकार ने ही बताया।

इष्टकर्म, संक्रमण, गुणकर्म, वर्गकर्म और त्रैराशिक आदि गणित प्राचीन ग्रन्थों में भी हैं, किन्तु भास्कर ने उन गणितों पर अधिक प्रकाश डाला है। यह ग्रन्थकार की विशेषता है।

'द्विष्ट कर्म' की विधि प्राचीन ग्रन्थों में पृथक् नहीं है, लेकिन महापात निश्चालने में ज्याँतियों लोग जो दो इष्ट मानकर क्रिया करते हैं, वही द्विष्ट कर्म का भेद है। इधर पूज्यवर वामुदेव शास्त्री के समय से ललावती की टिप्पणियों में द्विष्ट कर्म विधि लिखी गयी है। संकलित गणित का नाम आर्यभट्ट ने चिति रखा है। आर्यभट्टों के गणित पाद में योगान्तर श्रेढी का योग विधि है।

प्रमाण :—

इष्टं व्येकं दलितं सपूर्वमुत्तरगुणं समुखनध्यम् ।

इष्टगुणितनिष्ठधनं त्वयत्रायन्तं पदार्धहतम् ॥

यहाँ इष्ट से पद, इष्टधन से सर्वधन और पूर्व से आदि समझना चाहिये। यही प्रकार ललावती ने भी है। ब्रह्मगुप्त ने चिति का नाम हंदा कर संकलित, संकलित-संकलित रखा। आज भी वही व्यवहृत है।

आर्यभट्ट एवं ब्रह्मगुप्त ने गुणोत्तर श्रेढी के गणित नहीं लिखे, किन्तु द्वितीय आर्यभट्ट ने महासिद्धान्त में एवं पृथक् स्वामी ने अपने ग्रन्थ में इसे लिखा है। ललावती का आधार स्वामी जी का गणित हो सकता है। क्षेत्रव्यवहार आदि के गणित भी प्राचीन ग्रन्थों में हैं। इसका सम्पूर्ण विवेचना से लेख विलुप्त होने का आशंका है, अतः यहाँ इतना ही कहना पर्याप्त है कि प्राचीन गणित के विद्वान् में सर्वाधिक श्रेय ग्रन्थकार को है।

निष्ठा, लघुतम, महत्तम, दशमलव, ऐकिक नियम, व्यवहार गणित, समान्तर श्रेणी और जेनरलानयन पर विशेष रूप से प्रकाश डाला गया है। पूर्व की टीका में उक्त विषयों की कमी थी, इस हेतु संस्कृत के छात्र गणित में पूरे सफल न हो पाते थे। अब एक मात्र इस ग्रन्थ को पढ़ने से प्राचीन या नवीन रीति से सभी तरह के प्रश्नों का उत्तर देने में छात्र सफल होंगे। छात्रों के लिये इसमें प्रत्येक सूत्र का अन्वय, अनुवाद, उपपत्ति और हिन्दी में उदाहरण लिखे गये हैं।

इस टीका के निर्माण में मैं अपने पूज्य गुरुवर आचार्य श्रीमान् सुरलीधर उद्दर जी तथा कविवर आचार्य श्री सीताराम झा जी का विशेष आभारों है। जिनकी लीलावती-टीका से स्वल्पविशेष पर सुझे विशेष सहायता मिली है।

यदि इस टीका से छात्रों को कुछ भी लाभ हो सके तो मेरा श्रम सफल होगा। भ्रत होना मानव का धर्म है, अतः विद्वान् उसे सूचित करने की कृपा करेंगे।

अन्त में मैं अपने प्रकाशक को धन्यवाद देता हूँ, जिन्होंने प्राचीन संस्कृति, सेवा व्रत को लक्ष्य बनाकर ही ऐसे शुभ कर्मों के अनुष्ठान में तत्पर रहकर अपनी सात्त्विक शक्ति का परिचय दिया है। आज तक के प्रकाशित ग्रन्थों में इस ग्रन्थकी विशालता का ध्यान रखे बिना ही इन्होंने इसके प्रकाशनार्थ धनवाहुल्य व्यय भारवहन की उदारता अपनाई। इस हेतु भगवान् शंकर से मेरी प्रार्थना है कि उनका अन्तुदय सर्वथा करें।

चैत्रगुरु रामनवमी ।
वि० सं० २०१८ ।
वैद्यनाथ धान ।

निवेदक—
—लपणलाल झा

विषय-सूची

विषय	पृ०	विषय	पृ०
ग्रन्थकार का मङ्गल	१	अंग्रेजी सुद्रा की परिभाषा	७
टीकाकार का मङ्गल	१	" " तौल की परिभाषा	८
सुद्रा की परिभाषा	२	" " लम्बाई के मान	११
भार परिमाण	१	" " नूनि की अंग्रेजी नाप	११
नापा-आदि के मान	१	योगान्तरादि का सांकेतिक चिह्न	११
अंगुलादि के मान	२	अभिन्न परिकर्माष्टक	९
योजन आदि के मान	१	ग्रन्थ का मङ्गल	९
घन हस्त आदि के मान	१	संख्या के स्थान कथन	११
द्रोण आदि के मान	१	योगान्तर के सूत्र	१०
यवनोक्त टंक आदि के मान	४	कर्मोक्तम रीति प्रदर्शन	११
बालनगीर शाह प्रचारित सेर आदि का मान	४	गुणन का प्रथम प्रकार	१२
काल आदि की परिभाषा	१	" " द्वितीय प्रकार	१३
भारतीय सुद्रा की परिभाषा	५	" " तृतीय प्रकार	१३
तौल की परिभाषा	१	" " चतुर्थ प्रकार	११
देशी तौल का परिमाण	१	" " पंचम प्रकार	११
बम्बई का स्थानीय तौल	१	गुणन परिशिष्ट	१६
१९५७ के १ अप्रैल से प्रचलित भारतीय सुद्रा का मान	६	गुणनफल जाँचने की रीति	१७
मद्रास की तौल	१	भागहार के सूत्र	११
बस्तुओं की गणना का परिमाण	७	भागहार परिशिष्ट	१८
लम्बाई नाप की परिभाषा	१	पूर्ण और अपूर्ण भाज्य की परिभाषा	१८
खेतों के क्षेत्रफल का देशी परिमाण	७	क्षुब्ध भागहार	१८
बाबदरी नाप तौल	१	भागहार की संज्ञित विधि	१९
दर्जी की नाप	१	भागफल जाँचने की रीति	११
		लघुतम सनापवर्त्य	११
		लघुतम निकालने का प्रकार	११

विषय	पृ०	विषय	पृ०
मिश्र योग	६४	गुण कर्म विधि	९३
” घटात्र	”	अभ्यासार्थ प्रश्न	९९
” गुणा	६५	त्रैराशिक विधि	१००
” भाग	”	व्यस्त त्रैराशिक विधि	१०२
अभ्यासार्थ प्रश्न	६६	त्रैराशिक परिशिष्ट	१०३
व्यवहार गणित	६८	अभ्यासार्थ प्रश्न	१०५
शून्य परिकर्माष्टक	७१	पंचराशिकादि विधि	१०६
विलोम विधि	७२	भाण्ड प्रति भाण्ड करण विधि	१११
अभ्यासार्थ प्रश्न	७५	परिशिष्ट में ऐकिक नियम	११२
इष्ट कर्म विधि	७६	मिश्रक व्यवहार	११७
शेष जाति विधि	७८	मूलधन और कलान्तर (सू०)	
विश्लेष जाति	८०	लाने की विधि	”
द्वीष्ट कर्म विधि	८२	परिशिष्ट	११९
इष्ट कर्म परिशिष्ट—		अभ्यासार्थ प्रश्न	१२०
अभ्यासार्थ प्रश्न	८५	सू० के नेद	१२०
द्वीष्ट कर्म परिशिष्ट—		साधारण सू० का उदाहरण	१२३
अभ्यासार्थ प्रश्न	८५	चक्रवृद्धि व्याज के उदाहरण	१२६
संक्रमण विधि	८६	प्रश्नान्तर	१२४
” ” परिशिष्ट	८८	मिश्रान्तर करण सूत्र	”
वर्गान्तर और राशि योग से		विशेषः—में साक्षा गणित	१२७
राशियों का ज्ञान	८८	अभ्यासार्थ प्रश्न	१२८
वर्गयोग और राश्यन्तर या		वाप्यादि पूरणक काल ज्ञान	
राशियोग के ज्ञान से		विधि	१२९
राशि ज्ञान	”	प्रश्नान्तर	१३०
घनान्तर और राश्यन्तर के ज्ञान		क्रय विक्रयार्थक सूत्र	”
से राशि ज्ञान	८८	रत्नों के मुख्य निकालने की विधि	१३२
घन योग और राशि योग के		अभ्यासार्थ प्रश्न	१३४
ज्ञान से राशि ज्ञान	८९	सुवर्ण गणित सूत्र	१३५
अभ्यासार्थ प्रश्न	”	वर्ण ज्ञानार्थ सूत्र	१३७
वर्ग कर्म विधि	९०	सुवर्ण ज्ञानार्थ सूत्र	१३८

विषय	पृ०
परिशिष्ट	२१२
मनसुत्र त्रिमुञ्ज का लम्ब और त्रैत्र फल वि०	"
सप्तद्विवाहु त्रिमुञ्ज का लम्ब एवं त्रैत्रफलानयन	"
सप्तकोण त्रिमुञ्ज का त्रैत्रफल वि०	२१३
सप्तद्विवाहु सप्तकोण त्रिमुञ्ज का त्रैत्र फल वि०	"
विविध उदाहरण अन्यासाय प्रश्न	२१५
चतुर्भुज एवं त्रिमुञ्ज का स्थूल और सूक्ष्म रीति से फला- नयनार्थ सू०	२१७
स्थूलत्र निरूपणार्थ सू०	२२१
परिशिष्ट	"
अन्यासाय प्रश्न	२२३
सप्त चतुर्भुज और आयत त्रैत्र का फलानयनार्थ सूत्र	२२५
फलवल्ब्यादिक सूत्र	२२९
लम्ब ज्ञानार्थ सूत्र	२२९
लम्ब ज्ञान से ऋणार्थ सूत्र	२३०
इष्ट ऋण ऋणनार्थविशेषाच्छि सूत्र	२३२
विषय चतुर्भुज फलानार्थ सूत्र	२३३
समान लम्ब त्रैत्र के अवघादि ज्ञानार्थ सूत्र	२३७
ब्रह्म गुणोक्त ऋणानयन	२३८
लघु प्रक्रिया से ऋणानयन	२३९
परिशिष्ट	२४२
अन्यासाय प्रश्न	२४४
वर्ग एवं आयत त्रैत्र का फल	२४५
अन्यासाय प्रश्न	२४८

विषय	पृ०
समानान्तर चतुर्भुज का त्रैत्र फल वि०	२५५
अनेक उदाहरण	२५६
अन्यासाय प्रश्न	२५८
सप्तलम्ब चतुर्भुज का त्रैत्र फ०	"
उदाहरण	२५९
अन्यासाय प्रश्न	२६१
परिशिष्ट	"
सामान्य चतुर्भुज का त्रैत्रफल विचार	२६३
उदाहरण	२६६
अन्यासाय प्रश्न	२६८
सूची त्रैत्रोदाहरण	२७०
सन्ध्यादि के ज्ञानयनार्थ सूत्र	१७०
ऋणद्वय के योग से भूमि पर लम्बादि ज्ञानार्थ सूत्र	२७२
सूत्र्यावाधा लम्ब भुज ज्ञानार्थ सूत्र	२७३
सूक्ष्म और स्थूल परिधि ज्ञानार्थ सूत्र	२७५
परिशिष्ट	२७७
अन्यासाय प्रश्न	२८०
वृत्त त्रैत्रफल, गोल पृष्ठ फल एवं गोलघनफलार्थ सूत्र	२८१
अन्य प्रकार	२८४
परिशिष्ट	२८५
विविध उदाहरण	"
अन्यासाय प्रश्न	२८८
दार जीवानयनार्थ सूत्र	२९०
परिशिष्ट	२९२
अन्यासाय प्रश्न	२९३
वृत्तान्तर्गत च्युत आदि त्रैत्रों का मुजानयन	२९५

लीलावती

‘तत्त्वप्रकाशिका’ व्याख्योपेता

मङ्गलाचरणम्—

प्रीतिं भक्तजनस्य यो जनयते विन्नं विनिन्नन् स्मृत-
स्तं वृन्दारकवृन्दवन्दितपदं नत्वा मतङ्गाननम् ।
पाटीं सद्गणितस्य वच्मि चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटां
संक्षिप्ताक्षरकोमलामलपदैर्लालित्यलीलावतीम् ॥ १ ॥

टीकाकर्तुर्नङ्गलाचरणम्—

गिरीशं गिरिजाकान्तनर्धनारीश्वरं प्रमुञ्च ।
हार्दपीठे समासीनं ‘वैद्यनाथं’ भजे शिवम् ॥
नत्वा गुरुपद्मान्मोजं ध्यात्वा हेरम्भनातरम् ।
‘तत्त्वप्रकाशिकां’ कुर्वे परिशिष्टैरलङ्कितम् ॥

यः स्मृतः भक्तजनस्य विन्नं विनिन्नन् प्रीतिं जनयते, तं वृन्दारकवृन्द-
वन्दितपदं मतङ्गाननं नत्वा (अहं भास्कराचार्यः) चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटां संक्षि-
प्ताक्षरकोमलामलपदैः लालित्यलीलावतीं सद्गणितस्य पाटीं वच्मि ।

स्मरण करने पर जो भक्तजन के विन्नो को नाशकर प्रीति को देते हैं,
देवताओं के समूह से नमस्कृत चरण वाले उन श्रीगणेश जी को प्रणाम कर
(मैं भास्कराचार्य) चतुरजन को प्रीति देने वाली, स्पष्ट, थोड़े अक्षर, कोमल

अङ्गुलादिमानम्—

यवोदरैरङ्गुलमष्टसंख्यैर्हस्तोऽङ्गुलैः पङ्गुणितैश्चतुर्भिः ।

हस्तैश्चतुर्भिर्भवतीह दण्डः क्रोशः सहस्रद्वितयेन तेषाम् ॥ ५ ॥

इह अष्टसंख्यैः यवोदरैः अंगुलं, पङ्गुणितैश्चतुर्भिरङ्गुलैः हस्तः, चतुर्भिर्हस्तैः दण्डः, तेषां सहस्रद्वितयेन च क्रोशः भवति ॥ ५ ॥

आठ यवोदर का एक अंगुल, चौबीस अंगुल का एक हाथ, चार हाथ का एक दण्ड और दो हजार दण्ड का एक क्रोश होता है ॥ ५ ॥

योजनादिमानम्—

स्याद्योजनं क्रोशचतुष्टयेन तथा करानां दशकेन वंशः ।

निवर्तनं विंशतिवंशसंख्यैः क्षेत्रं चतुर्भिश्च भुजैर्निवद्धम् ॥ ६ ॥

क्रोशचतुष्टयेन योजनं, तथा दशकेन करानां वंशः, विंशतिवंशसंख्यैः चतुर्भिः भुजैः निवद्धं क्षेत्रं च निवर्तनं स्यात् ॥ ६ ॥

चार क्रोश का एक योजन, दश हाथ का एक वंश और बीस वंश के तुल्य चार भुजाओं से निवद्ध (वर्गाकार) क्षेत्र एक निवर्तन (बीजा) होता है ॥ ६ ॥

वनहस्तादिमानम्—

हस्तोन्मितैर्विसृतिदैर्व्यपिण्डैर्यद् द्वादशाक्षं वनहस्तसंज्ञम् ।

धान्यादिक्रेयद् वनहस्तमानं शास्त्रोदिता मागधखारिका सा ॥ ७ ॥

हस्तोन्मितैः विसृतिदैर्व्यपिण्डैः यत् द्वादशाक्षं (यत्) वनहस्तसंज्ञम् (भवति) । धान्यादिक्रेयद् वनहस्तमानं सा शास्त्रोदिता मागधखारिका (भवति) ॥

एक हाथ चौड़ा, लम्बा और मोटा बारह कोश वाला गदा वनहस्त संज्ञक है । धान्यादिक्रे तौलने में जो वनहस्त की तौल है वह मगध देश में व्यवहृत शास्त्रोक्त सारी है ॥ ७ ॥

द्रोणादिमानम्—

द्रोणस्तु खार्याः खलु षोडशांशः स्यादादक्रो द्रोणचतुर्थभागः ।

प्रस्थश्चतुर्थांश इहादकस्य प्रस्थात्रिराद्यैः कुडवः प्रदिष्टः ॥ ८ ॥

का १ वर्ष । माघ से ६ महीना = १ सौन्यायन का । श्रावण से ६ महीना = १ यान्यायन का । नवीन मत से-६० सेकेण्ड = १ मिनट, ६० मिनट=१ घंटा। २४ घंटा = १ दिन । ७ दिन = १ सप्ताह । ३६५ दिन = १ वर्ष । ३६६ दिन= १ लीपवर्ष । १०० वर्ष = १ शताब्दी ।

विशेषपरिभाषाविवरणम्

भारतीय मुद्रा की परिभाषा—

२० रचौड़ी	=	१ फौड़ी,	२० फौड़ी	=	१ चौड़ी
२० चौड़ी	=	१ कौड़ी,	२० कौड़ी	=	१ दमड़ी
२ दमड़ी	=	१ छद्राम,	२ छद्राम	=	१ अघेला
२ अघेला	=	३ पाई,	३ पाई	=	१ पैसा
४ पैसे	=	१ आना,	१६ आने	=	१ रुपया

तौल की परिभाषा—

८ खसखस	=	१ चावल,	८ चावल	=	१ रची
८ रची	=	१ माशा,	१२ माशा	=	१ तोला
५ तोला	=	१ छटाक,	४ छटाक	=	१ पाव
४ पाव	=	१ सेर,	५ सेर	=	१ पसेरी
८ पसेरी	=	१ मन			

देशी तौल का परिमाण—

२० फनई	=	१ रनई,	२० रनई	=	१ कनई
२० कनई	=	१ छटाक,	१६ छटाक	=	१ सेर
४० सेर	=	१ मन			

बन्वई का स्थानीय तौल—

४ धान	=	१ रिक्क,	८ रिक्क	=	१ माशा
४ माशे	=	१ टंक,	५२ टंक	=	१ सेर
४० सेर	=	१ मन,	२० मन	=	१ कांठी
१ मन	=	२८ पौण्ड			

वस्तुओं के गणना का परिमाण—

१२ वस्तु	=	१ दर्जन,	१२ दर्जन	=	१ ग्रास
५ वस्तु	=	१ गाही,	२० वस्तु	=	१ कोड़ी
२४ ताव कागज	=	१ जिस्ता,	२० जिस्ता	=	१ रीम
१० रीम	=	१ गड्डा,	२०० पान	=	१ डोली

लन्वाई माप की परिभाषा—

३ यव	=	१ अंगुल,	३ अंगुल	=	१ गिरह,	४ गिरह	=	१ विक्ता
						८ गिरह	=	१ हाय,
						१६ गिरह	=	१ गज
५ हाय	१ विक्ता	=	१ लग्गा (पूर्णियाँ)	४ हाय	=	१ लग्गा (बंगाल)		
६३ या ७३ हाय	=	१ लग्गा (दरभंगा)	९ हाय (भुजासहित)	=	१ लग्गा (नेपाल)			
						२० लग्गा	=	१ जरीव

खेतों के क्षेत्रफल का देशी परिमाण—

२० फुरकी	=	१ धुरकी ।	२० धुरकी	=	१ धूर ।	१६ कनई	=	१ छटाक ।
४ छटाक	=	१ पौवा ।	४ पौवा	=	१ धूर ।	२० धूर	=	१ कट्टा
२० कट्टा	=	१ बीघा ।	२० लग्गी	=	१ रस्ती ।			
रस्ती × रस्ती	=	बीघा ।	रस्ती × लग्गी	=	कट्टा ।	ल० × ल०	=	धूर ।
ल० × पौवा	=	पौवा ।	ल० × छटाक	=	छटाक ।	द० × द०	=	कनई ।
र० × पौ०	=	५ गुणाधूर ।	र० × द०	=	सवा गुणाधूर ।			

डाक्टरी नाप तौल—

२० ग्रेन	=	१ स्क्रूपल,	३ स्क्रूपल	=	१ ड्राम			
८ ड्राम	=	१ औंस,	६० बून्ड	=	१ ड्राम			
८ ड्राम	=	१ औंस,	२० औंस	=	१ पाइन्ट			
						८ पाइन्ट	=	१ गैलन

दर्जी की माप—

२३ इञ्च	=	१ गिरह (लुग्दी),	४ गिरह	=	१ क्वार्टर (वालिस्त)
४ क्वार्टर	=	१ गज,	५ क्वार्टर	=	१ एल

अंग्रेजी मुद्रा की परिभाषा—

४ फार्डिङ्ग	=	१ पेनी,	१२ पेन्स	=	१ शिल्लिंग
-------------	---	---------	----------	---	------------

अथाभिन्नपरिकर्माष्टकम्

मङ्गलाचरणम्—

लीलागललुल्लोलकालव्यालविलासिने ।

गणेशाय नमो नीलकमलामलकान्तये ॥ १ ॥

लीलागललुल्लोलकालव्यालविलासिने (लीलाया गळे लुडन्तो ये लोलाश्च-
द्धाः कालव्यालास्तेषां विलासो विद्यते यस्मिन् तस्मै) (एवं) नीलकमला-
नलकान्तये गणेशाय नमोऽस्तु ॥ १ ॥

लीला से गळे में लिपटे हुए चञ्चल सर्प से शोभित और नील कमल के
समान निर्मल कान्तिवाले गणेशजी को नमस्कार है ॥ १ ॥

संख्यास्थानानि—

एकदशगुणसहस्रायुतलक्षप्रयुतकोटयः क्रमशः ।

अर्बुदमञ्जं खर्वनिखर्वमहापद्मशङ्खवस्तस्मात् ॥ २ ॥

जलधिश्चान्त्यं मध्यं परार्धमिति दशगुणोत्तराः संज्ञाः ।

संख्यायाः स्थानानां व्यवहारार्थं कृताः पूर्वैः ॥ ३ ॥

एक (१), दश (१०), शत (१००), सहस्र (१०००), त्रयुत
(१००००), लक्ष (१०००००), प्रयुत (१००००००), कोटि (१०००००००),
अर्बुद (१००००००००), अत्र (१०००००००००), खर्व (१००००००००००),
निखर्व (१०००००००००००), महापद्म (१००००००००००००), शंख
(१०००००००००००००), जलधि (१००००००००००००००), अन्त्य
(१०००००००००००००००), मध्य (१०००००००००००००००) और
परार्ध (१००००००००००००००००००) ये संज्ञा उच्चोच्च दशगुणित हैं ।
इन स्थानों की संख्या व्यवहार के लिए पूर्वाचार्यों ने की है ।

उपपत्तिः—अथ गगनायानङ्कस्यैव प्रावान्यत्त्वादिह जगति अङ्कज्ञानं विना न
कोऽपि जनः किमपि कार्यं कर्तुं शक्यते, अत एवाङ्कमेव संसारस्य बीजमिति कथने
न काऽपि विप्रतिपत्तिः । तत्राङ्कशास्त्रे चा गगनारोतिः दृश्यते सा वेदेऽप्यस्ति ।
यथा यजुर्वेदसंहितायाः सप्तदशाध्याये 'दश दश च शतं शतं च सहस्रं च सहस्रं

द्वि (२) पञ्च (५) द्वात्रिंशत् (३२) त्रिनवतिशत् (१९३) अष्टादश (१८) दश (१०) शत (१००) अंकानां योगफलं किं स्यात्तया एतान् अंकान् अयुक्तात् (१००००) विशोधनेनान्तरफलं किं भवेदिति ब्रूहि ।

हे बाले, बुद्धिमति, लीलावति ! यदि पाटीगणित के योग और घटाव को तुम अच्छी तरह जानती हो, तो २, ५, ३२, १९३, १८, १०, इनको १०० में जोड़कर योगफल कहो और इस योगफल को १०००० में घटाने पर शेष क्या होगा वह भी बताओ ॥

न्यासः—२।५।३२।१९३।१८।१०।१०० संयोजनाज्ञातम् ३६०।
अयुक्तात्—(१००००) शोधिते जातम् ६६४०।

विशेष—यहाँ क्रम और उच्चम रीति से योग और अन्तर करने की विधि बतायी गयी है। जैसे ३२५ में १२५ को जोड़ना है तो पहले ३२५ के नीचे इकाई के स्थान में ५ को और दहाई की जगह २ को फिर सैकड़ों की जगह १ को लिखा तो ३३५ ऐसा हुआ। अब पाँच में पाँच को जोड़ा तो दश हुआ, दश का रक्ता शून्य हाथ में रहा १, फिर दहाई वाले अङ्कों को जोड़ा तो ४ हुआ इसमें हाथ वाला अङ्क १ जोड़ा तो ५ हुआ, इसको शून्य की बाँयी तरफ में रख दिया। बाद में सैकड़ों स्थान वाले अङ्कों को जोड़ा तो ४ हुआ, इसको ५ की बाँयी तरफ रक्ता तो योग के समी अङ्क ४५० हुए। यही क्रमरीति से योग फल हुआ। क्रमरीति में पहले दाहिनी तरफ से अङ्कों का योग प्रारम्भ होता है और उच्चम में बाँयी तरफ से।

उच्चमरीति से योग करने के लिए ३२५ के नीचे १२५ को रक्ता। यहाँ बाँयी तरफ में ३ के नीचे १ है अतः दोनों का योगफल ४ को अलग लिख दिया। इसके बाद दो में दो को जोड़ने से ४ हुआ, उसको पहले वाला ४ की दाहिनी बगल में रक्ता। अब इकाई वाले अङ्कों का योग किया तो १० हुआ, दश का शून्य पहले ४ की दाहिनी तरफ रख दिया और १ को शून्य की बाँयी तरफ वाले ४ के ऊपर लिख दिया तो ऐसा हुआ ४५०। इनका योग किया तो—४५० पहले योग फल के समान हुआ।

जैसे क्रमरीति से ३२५ उच्चमरीति से इन दोनों का योग-
इन दोनों का योग फल = $\frac{१२५}{४५०}$ फल— $\frac{३२५}{६३५} | \frac{१२५}{४५०}$ ।

३ को उसकी बाँयी तरफ २ के ऊपर लिख दिया। बाद में फिर १२ को ५ के सामने रक्त्वा और गुणा क्रिया तो ६० हुआ, इसमें शून्य को ५ के ऊपर दिया और ६ को उसकी बाँयी तरफ ६ के ऊपर लिखा। आगे गुण्य में अङ्क नहीं हैं इस हेतु गुणनक्रिया समाप्त हो गयी। अङ्क रहने पर इसी तरह आगे भी क्रिया करनी चाहिए। बाद में सबों को जोड़ने पर गुणनफल होता है। यह क्रिया भूमि या सिलेटे प्रवृत्ति पर शीक से होती है।

जैसे—गुण्य = १३५

३६

३६

गुणक = १२

१२६० = $\frac{१२६०}{१,३,५}$

१,३,५

१६२० = गुणन फल।

१२

यदि इकाई वाले अङ्क को गुण्य का अन्तिम अङ्क मान लिया जाय तो प्रचलित गुणनक्रिया के मुख्य ही इसकी विधि होगी। जैसे १३५ को १२ से गुणा करना है तो १२ से पहले ५ को गुणा क्रिया तो ६० हुआ, इसमें शून्य को नीचे लिखा, हाय में रहा ६, फिर १२ से ३ को गुणा क्रिया तो ३६ हुआ, इसमें हाय वाला ६ निला दिया तो ४२ हुआ, ४२ का २ नीचे लिखा, हाय में चार रहा। अब १२ से १ को गुणा क्रिया तो १२ हुआ, इसमें हाय वाला ४ बोड़ा तो १६ हुआ। इसको पहले वाले २ की बाँयी बगल में लिख दिया तो १६२० हुआ। यही उन दोनों अङ्कों का गुणनफल हुआ।

द्वितीयः प्रकारः—

गुण्यस्त्वधोऽधो गुणखण्डतुल्यस्तैः खण्डकैः संगुणितो युतो वा ।

वा गुणखण्डतुल्यः गुण्यः अवः अवः तैः खण्डकैः संगुणितः युतश्च कार्यस्तदा गुणनफलं भवतीति ।

इच्छानुसार गुणक का खण्ड करके खण्डतुल्य स्थानों में क्रम से नीचे-नीचे गुण्य को लिख कर उनको प्रत्येक गुणक खण्ड से गुणा कर जोड़ने से गुणनफल होता है। जैसे गुण्य = १३५। गुणक = १२, यहाँ गुणक को दो खण्ड क्रिये ८।४ अब गुण्य को दो जगह लिख कर प्रत्येक खण्ड से गुणा क्रिया तो—

१३५ × ८ = १०८०

१३५ × ४ = ५४० । इन दोनों का योग क्रिया तो—१०८० + ५४० = १६२० =

गुणन फल।

जैसे गुण्य = १३५, गुणक = १२ । इष्ट = २ । यहाँ १२-२ = १० = इष्टोन गुणक । १२ + २ = १४ = इष्टयुक्तगुणक । इन दोनों से गुण्य १३५ को गुणा करने पर क्रम से— १३५ × १० = १३५० और १३५ × १४ = १८९० हुए ।

अब इष्ट गुणित गुणक = १३५ × २ = २७०, इसको दोनों में क्रम से जोड़े और घटाये तो १३५० + २७० = १६२० । १८९० - २७० = १६२० । ये दोनों गुणनफल हुए ॥ ६ ॥

उपपत्ति:—गुणयितुं योग्यो गुण्यस्तथा येन गुण्यते स गुणक इति । गुणकस्थानस्थितानां गुणयानां योगो हि गुणनफलं, तच्च गुण्यगुणकयोर्घातितुल्यमत उपपन्नः प्रथमः प्रकारः । यत्र गुण्यः = अ । गुणकः = च । तत्र गुणनफलं = अ × च । अत्र यदि च = प × फ । तदा गुणनफलं = अ × च = अ × (प + फ) = अ × प + अ × फ । एतेनोपपन्नो द्वितीयः प्रकारः ।

कल्प्यते गु = गुण्य । गुणक = प । ∴ गुणनफलं = गु × प । अत्र यदि $\frac{प}{अ} = क$, तदा प = अ × क । ∴ गु. फ. = गु × अ × क । अत उपपन्नतृतीयः प्रकारः ।

यदि गुणकः = १० अ + क, तदा गु. फ. = गुण्य × (१० अ + क) = गुण्य × १० अ + गुण्य × क । अत्र 'क' एकस्थानीयस्तथा 'अ' दशस्थानीय-स्त्वयोरुन्वयगुणितयोः स्थानवशेन योगो गुणनफलसमो दृश्यते, अत उपपन्नचतुर्थः प्रकारः ।

यदि गुणक = क, गुण्य = च, तदा गुणनफलं = क × च । एवं क × च = गुण्य × (गुणक = इ = इ)
= गुण्य × गुणक = गुण्य × इ = गुण्य × इ)
= गुण्य (गुणक = इ) = गुण्य × इ । अत उपपन्नः पञ्चमः प्रकारः ॥ ६ ॥

अत्रोद्देशकः (प्रश्नः)—

बाले बालकुरङ्गलोलनयने लीलावति प्रोच्यतां
पञ्चश्रेकमिता त्रिवाकरगुणा अङ्काः कति स्युर्वदि ।
रूपस्थानविभागखण्डगुणने कन्याऽसि कन्याणिनि
चिद्भ्रान्तेन गुणेन ते च गुणिता जाताः कति स्युर्वद ॥ १ ॥

(२) किसी संख्या को १३ से १९ तक की किसी संख्या से गुणा करना हो तो—गुणक के प्रत्येक अङ्क को गुणक की इकाई वाले अङ्क से साधारण रीति से गुणा करते चलो, परन्तु गुणा करके हाथ में आये अङ्क जोड़ने के बाद गुण्य में उस अङ्क के पहले आने वाला अङ्क भी जोड़ कर लिखने से गुणन-फल होगा ।

जैसे—२५ को १४ से गुणा करना है अतः ४ से ५ को गुणा किया तो २० हुआ, इसका शून्य, हाथ में २, फिर २ को गुणा किया तो ८ इसमें हाथ का २ जोड़ा, १० हुआ, इसमें पहले वाला गुण्य का अङ्क ५ जोड़ा तो १५ हुआ, इसका ५ लिखा हाथ में १, अब गुण्य में अङ्क नहीं है । अतः हाथ वाले १ को गुण्य के अन्तिम अङ्क में जोड़ कर लिख दिया तो कुल ३५० हुये । इसी तरह सर्वत्र जानना चाहिए ।

गुणनफल जाँचने की रीति—

(३) यदि गुणनफल में गुण्य से भाग देने पर लब्धि गुणक के तुल्य आ जाय, तो गुणनफल शुद्ध समझना चाहिए ।

अथ भागहारे करणसूत्रं वृत्तम्

भाज्याद्धरः शुध्यति यद्गुणः स्यादन्त्यात् फलं तत् खलु भागहारे ।
समेन केनाप्यपवर्त्य हारभाज्यौ भजेद्वा सति सम्भवे तु ॥ ७ ॥

अन्त्याद् भाज्यात् हरः यद्गुणः शुध्यति तत् खलु भागहारे फलं स्यात् । वा सम्भवे सति हारभाज्यौ केनापि समेन (अङ्केन) अपवर्त्य भजेत् तदा फलं स्यात् ॥ ७ ॥

भाज्य के अन्तिम अङ्क से लेकर हर जितना गुणा घट जाय वह भाग हरण में फल (लब्धि) होता है । अथवा यदि सम्भव हो तो किसी एक ही अङ्क से हर और भाज्य को अपवर्तन देकर फिर हर की लब्धि से भाज्य की लब्धि को भाग देने पर फल होता है ॥ ७ ॥

उपपत्तिः—मकुं योग्यो भाज्यो येन विभज्यते स भाजकस्तथा भजनेन यत्फलं सा लब्धिः । भाज्याद् यद्गुणो भाजकः शुध्यति सा गुणसंख्या एव

$२२८ \div ३ = ७६$, द्वि० शेष० = ० । $७६ \div ३ = २५$ तृ० शेष० = १ । यहाँ लब्धि २५ ठीक है, किन्तु शेष इसमें वास्तव नहीं होता । अतः शेष जानने के लिये यदि भाजक के दो खण्ड किये गये हों, तो—प्र० शेष + प्र० भाजक \times द्वि० शेष = वा० शेष । यदि ३ खण्ड हों, तो—प्र० शेष + प्र० भा० \times द्वि० शेष + प्र० भा० \times तृ० शेष = वा० शेष । इसी तरह आगे भी समझना चाहिए । उपरोक्त उदाहरण में—वास्तव शेष = $१८ = ३ + ५ \times ० + ५ \times ३ \times १$ ।

भागहार की संक्षिप्त रीतियाँ—

(३) यदि किसी संख्या को $५, ५^२, ५^३, ५^४$, इनसे भाग देना हो, तो उस संख्या को क्रम से $२, २^२, २^३, २^४$ से गुणा कर क्रम से $१०, १०^२, १०^३, १०^४$ से भाग देने पर लब्धि आती है ।

यथा— $५३६८९ \div ५^२ = \frac{५३६८९ \times ४}{५} = २१४७$ शेष ५६ ।

(४) यदि किसी संख्या को $१०, १००, १०००, १००००$, आदि से भाग देना हो, तो भाजक में जितने शून्य हों, उतनी भाज्य की आदिम संख्या को शेष और बाँकी संख्या को लब्धि समझें ।

जैसे $३६७१ \div १००० = ३$ लब्धि । शेष ६७१ ।

भागफल जाँचने की रीति—

(५) यदि भाजक और लब्धि के गुणनफल में शेष जोड़ देने से भाज्य के समान हो जाय तो लब्धि ठीक है, अन्यथा नहीं ।

लघुतम समापवर्त्य—

(१) वह सबसे छोटी संख्या, जो दो या अधिक संख्याओं से पूरी-पूरी बँट जाय, उन संख्याओं के लघुतम समापवर्त्य कहलाती है ।

जैसे १५, ३०, ४५, ६०, आदि प्रत्येक ५ और ३ से पूरे-पूरे बँट जाते हैं, परन्तु इनमें सबसे छोटी संख्या १५ है, अतः ५ और ३ का लघुतम १५ है ।

लघुतम निकालने का प्रकार—

(२) जिन संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालना हो, उनको एक पंक्ति में लिखकर उनमें ऐसे अङ्क से भाग देना चाहिए जिससे दो या दो

यथा ९, २७, ७२, १६२ इनका लघुतम समापवर्त्य निकालना है, तो इनके उत्पादक निकालने से— $९ = ३ \times ३$ । $२७ = ३ \times ३ \times ३$ । $७२ = ३ \times ३ \times २ \times २ \times २$ । $१६२ = २ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३$ ये हुए। यहाँ टुकड़ों को देखने से मालूम पड़ता है कि दो-दो करके ३ सबों में हैं। एक २ और एक ३ द्विनिष्ठ है तथा दो २ और एक ३ एकनिष्ठ है, अतः इन टुकड़ों को एक जगह लिखकर गुणा करने पर $३ \times ३ \times २ \times ३ \times २ \times २ \times ३ = ६४८$ हुआ। यही उपरोक्त संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य है।

लघुतम वताओं—

- (१) १२, ८१ (२) ३२, ७६ (३) ३२०, ९९, १२१, १९२
 (४) ९, १८, २४, ७२, १४४ (५) ७, २१, ६३, १२, ८४
 (६) २२२, २५४, ९०६।

महत्तम समापवर्तक—

(१) वह सबसे बड़ी संख्या, जिससे दो या अधिक संख्यायें पूरी-पूरी बँट जाती हैं, उन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक कहलाती है। यथा ३, ६, १२ इनमें से प्रत्येक से २४ और ७२ पूरे-पूरे बँट जाते हैं, किन्तु ३, ६, १२ में सबसे बड़ी संख्या १२ है। अतः २४ और ७२ का महत्तम समापवर्तक १२ हुआ।

(२) दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक निकालना—

जिन दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक निकालना हो, उनमें एक संख्या से दूसरी संख्या में भाग देकर जो शेष बचे उससे प्रथम भाजक को भाग दें, फिर दूसरे शेष से दूसरे भाजक को भाग दें। इसी प्रकार तब तक क्रिया करें जब तक शेष नहीं बचे। ऐसा होने पर अन्तिम भाजक उन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगा। यथा १५ और २५ का महत्तम समापवर्तक निकालने से अन्तिम भाजक ५ होता है, अतः उन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ५ हुआ।

(३) यदि दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक निकालना हो, तो पहले किसी दो का महत्तम समापवर्तक निकाल कर उस फल और

सप्तद्विघातः कृतिः उच्यते । इति प्रथमः प्रकारः । अथ अन्यवर्गः स्याप्यः, तथा परे (अङ्काः) द्विगुगान्यनिष्ठाः स्वस्वोपरिष्ठात् स्याप्याः । अन्यं त्यक्त्वा राशिसुत्सार्यं पुनः क्रिया कार्या, तदा कृतिः स्यादिति द्वितीयः प्रकारः । वा खण्ड-द्वयस्याभिहतः द्विनिष्ठा तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिः स्यादिति तृतीयः प्रकारः । वा इष्टेनयुग्राशिवधः इष्टस्य वर्गेण समन्वितस्तदा कृतिः स्यादिति चतुर्थः प्रकारः ॥

इसमें निम्न चार प्रकार के वर्ग करने की रीतियाँ कही गयी हैं ।

पहला प्रकार—यह है कि समान दो अङ्कों का गुणन फल वर्ग होता है । जैसे $५^2 = ५ \times ५$ ।

दूसरा प्रकार—जिस संख्या का वर्ग करना हो उसके अन्तिम अङ्क का वर्ग कर उस अङ्क के ऊपर रखना चाहिए । बाद में शेष अङ्कों को द्विगुणित अन्तिम अङ्क से गुणा कर अपने-अपने ऊपर में रखें । इसके बाद अन्तिम अङ्क को छोड़ कर शेष राशि को हटाकर पूर्वोक्त रीति से अन्यवर्ग इत्यादि क्रिया करें । यह क्रिया बारम्बार तबतक करें जबतक अङ्क बाँकी न रहे । जैसे १२ का वर्ग करना है तो अन्तिम अङ्क १ है, इसका वर्ग १ हुआ । इसको १ के ऊपर रख दिया, अब शेष अङ्क २ है । इसे द्विगुणित अन्तिम अङ्क $१ \times २ = २$ से गुणा कर २ के ऊपर रक्खा । अन्तिम अङ्क १ को छोड़ दिया, शेष २ को एक स्थान आगे बढ़ा कर लिखा और उसका वर्ग ४ को उसके ऊपर लिख दिया । आगे अङ्क नहीं है, इसलिए क्रिया समाप्त हो गयी । अब सबों को जोड़ लिया तो १४४ वर्ग हुआ ।

तीसरा प्रकार—जिसका वर्ग करना हो, उसका दो खण्ड करके उन दोनों खण्डों के गुणन फल को द्विगुणित कर उसमें उन दोनों खण्डों के वर्ग योग को जोड़ने पर वर्ग होता है । जैसे—८ का वर्ग करना है । अतः ८ को दो खण्ड ६ और २ किये । इन दोनों के गुणन फल १२ को द्विगुणित करने पर २४ हुआ । इसमें उन दोनों खण्डों के वर्ग योग $३६ + ४ = ४०$ को जोड़ दिया तो $२४ + ४० = ६४$ यही वर्ग हुआ ।

चौथा प्रकार—वर्ग करने वाला अङ्क में इष्ट संख्या को एक जगह जोड़ कर और दूसरी जगह घटा कर, उन दोनों योगान्तरों के वात में इष्ट का वर्ग जोड़ देने पर वर्ग होता है । जैसे, ८ का वर्ग करना है, तो इष्ट २ को ८ में

उदाहरण—पहली रीति से $९^२ = ९ \times ९ = ८१$ । $१४^२ = १४ \times १४ = १९६$ । $२९७^२ = २९७ \times २९७ = ८८२०९$ । $१०००५^२ = १००१०००२५$ ।

दूसरी रीति से—२९७ का वर्ग करना है, तो पहले अन्त्य अङ्क ७ के वर्ग ४
 १ } योग करने
 ८ २ } का अङ्क
 ३ २ १ ४
 ४ ६ ८ ६ ९
 २ ९ ७ प्रथमवार
 ९ ७ = द्वि. वार
 ७ = तृ. वार

योग = ८८२०९

को २ के ऊपर रक्ता । अब द्विगुणित अन्तिम अङ्क ४ से आगे के ९ और ७ को अलग २ गुणा कर उनके ऊपर में रत्न दिया । वाद में २ को छोड़ कर बाँकी ९७ को आगे उठा कर रक्ता, फिर ९ के वर्ग ८१ को उसके ऊपर निवेश किया । अब द्विगुणित अन्तिम अङ्क १८ से ७ को गुणा करने पर १२६ हुआ । इसमें ६ को ७ के ऊपर २ को ९ के ऊपर और १ को उसकी बाँयी वगल वाले अङ्क के ऊपर रक्ता । फिर ९ को छोड़ा और ७ को उठा कर आगे लिख कर उसका वर्ग ४९ को उसके ऊपर लिख दिया । आगे अङ्क नहीं है, अतः क्रिया समाप्त हो गयी । शेष में सबों को जोड़ने पर ८८२०९ वर्ग हुआ । इसी तरह सभी संख्याओं का वर्ग करना चाहिए । इससे सरल तीसरा और चौथा प्रकार है । उन सबों का उदाहरण मूल में स्पष्ट है, अतः यहाँ नहीं लिखा गया ॥ ९ ॥

इति वर्गविधिः ।

वर्ग परिशिष्ट

(१) दूसरी रीति में अङ्क का निवेश जो उपर्युपरि किया गया है, वह सिलेट के बिना ठीक नहीं होता, अतः सीधे नी कर सकते हैं ।

यथा १४ का वर्ग करना है, तो $१४ = ५ + ४ + ३ + २$ ।

$\therefore १४^२ = (५ + ४ + ३ + २)^२$ । इनका वर्ग दूसरा प्रकार से करने पर
 $= २५ + ४० + ३० + २० + १६ + २४ + १६ + ९ + १२ + ४ = १९६$ । एवं—
 $(२५)^२ = (१५ + १०)^२ = २२५ + ३०० + १०० = ६२५$ ।

अभ्यासार्थ प्रश्नाः—

वर्ग बताओ ।

(१) २५ + ५० + ३५

(३) ६० + ३० + ३५

(२) १३ + ३९७ + २१

(४) १०६४८

स्वयं ज्ञायते याप्रथममन्याद्भवंगस्ततो द्विगुजितानयोपान्याद्भवोघांतस्तन
उपान्यववंगस्तनेन अन्याद्विपमाद्वाघस्य वगः मुच्यन्ति तं शोधयेत् ततस्मेन द्विगुजित-
मूलेन समे भक्ते सायुपान्तिनाद्भुः स्यात्तस्यवगं तदाघविपमे शोधनेन मूलं स्यात् ।
शेषसत्त्वे तु पुनर्मूलं द्विगुजयेदित्यादि क्रिया कर्तव्योचितवेति सर्वमुपपन्नम् ॥१०॥

अत्रोद्देशकः ।

मूलं चतुर्णां च तथा नवानां पूर्वं कृतानां च सत्त्वं कृतीनाम् ।
पृथक्पृथक्वर्गपदानि विद्धि बुद्धेर्विबुद्धिर्यदि तेऽत्र जाता ॥११॥

हे मित्र ! यदि तेरी बुद्धि में बुद्धि हुई है, तो ४ और ९ का एवं पहले
क्रिये हुए वर्गों का वर्गमूल अलग २ बनाओ ।

न्यासः ४ । ६ । ८ । १६ । २५ । ३६ । ४९ । ६४ । ८१ । १०० । १०० । १२५ । लब्धानि
क्रमेण मूलानि २ । ३ । ६ । ४ । ५ । ६ । ७ । ८ । ९ । १० । १० । ११ ।

इति वर्गमूलम् ।

(१) उदाहरण—८१ का वर्गमूल निकालना है, तो पहले ८१ के ऊपर
विपम अङ्क १ के ऊपर विपम चिह्न (१) और सम अङ्क ८ के ऊपर सम
चिह्न (—) यह लगाया (८१) । अङ्क में जितने विपम चिह्न होंगे उतने
ही वर्गमूल में अङ्क होंगे, यह समझना चाहिए । यहाँ अन्य अङ्क विपम एक
ही होने के कारण अन्य विपमाङ्क ८१ को मानकर इसमें ९ का वर्ग घटना है,
अतः ९ वर्गमूल हो गया । आगे अङ्क नहीं है, अतः क्रिया नहीं बड़ी ।

(२) १९६ का वर्गमूल लेने के लिए विपम और सम का चिह्न लगाया

$$\begin{array}{r}
 1 \overline{) 196} \\
 \underline{1 } \\
 09 \\
 \underline{09 } \\
 16 \\
 \underline{16 } \\
 00
 \end{array}$$

तो दो विपम अङ्क मालूम हुए, अतः दो
अङ्क मूल में होंगे, यह निश्चय हुआ । अब
सूत्र के अनुसार अन्तिम विपम अङ्क १ में
१ का वर्ग घटा । मूल एक को दूना कर
समअङ्क ९ में भाग देने पर लब्धि ४
हुई । अब चार का वर्ग १६ को बाय
विपम १६ में घटाया तो शेष शून्य रहा,
अतः १९६ का मूल १४ हुआ । यहाँ

पहले १ का और पीछे ४ का वर्ग घटा है, अतः दोनों को दूना कर एक स्थान

(७) १३१२२ (८) २५५६४२ (९) (१० + १२ + ५) (१०) (३६ + ३४)
(११) (१० + १० + ५) ।

इति वनपरिशिष्टम् ।

अथ घनमूले करणसूत्रं वृत्तद्वयम्—

आद्यं वनस्थानमयाघने द्वे पुनस्तथाऽन्त्याद् घनतो विशोध्य ।
वनं पृथक्स्थं पदमस्य कृत्या त्रिघ्न्या तदाद्यं विभजेत् फलं तु ॥
पङ्क्त्यां न्यसेत् तत्कृतिमन्त्यनिर्घ्नीं त्रिर्घ्नीं त्यजेत् तत्प्रथमात् फलस्य ।
वनं तदाद्याद् घनमूलमेवं पङ्क्तिर्भवेदेवमतः पुनश्च ॥ १५ ॥

जिस संख्या का घनमूल निकालना हो उसके इकाई वाले अङ्क पर वन का चिह्न (।) लगाकर, बाद के दो अङ्कों पर अवन का चिह्न (—) लगावे। इसी तरह आगे के अङ्कों में एक वन और दो अवन होते हैं। इस प्रकार जब तक अङ्क शेष न हो जाय तब तक वन और अवन का चिह्न लगाया चाहिए। वन चिह्न के तुल्य ही अङ्क घनमूल में होते हैं।

वन चिह्न वाले अन्तिम अङ्क में जिसका घन घटे वह घटाकर उस घनमूल को अलग रखें। बाद में उस (घनमूल) के वर्ग को ३ से गुणा कर आदि के अवन में भाग दें। लघ्वि को पंक्ति में न्यास करें। अब उसके वर्ग को त्रिगुणित अन्त्य अङ्क से गुणा कर द्वितीय अवन में घटा दें और लघ्वि के घन को अवन के समीप के घन में घटा दें। यदि अङ्क शेष रहे तो फिर इसी तरह क्रिया करने पर घनमूल होता है ॥ १४-१५ ॥

जैसे ७२९ का घनमूल निकालना है तो ७२९ पर वन और अवन चिह्न लगा दिया। इसमें एक ही वन का चिह्न है, अतः ७२९ में जिसका घन घटेगा वही इसका घनमूल होगा। विचारने पर ९ का घन ७२९ वया, अतः $\sqrt[3]{७२९} = ९$ हुआ।

उपपत्तिः—कल्प्यते (अ + क)^३ = अ^३ + ३ अ^२ क + ३ अ क^२ + क^३
अत्र स्वरूपावलोकनेन 'आद्यं वनस्थानमयाघने द्वे' इति यद् घनावनचिह्ननिवेशनप्रकारोऽस्ति तद्युक्तियुक्तेनैव प्रतिभाति । तयान्त्याद्घनतो यस्य घनः शुष्यति सोऽन्तिमाङ्कस्तत्रत्रिगुणितान्यवर्गेण विनक्तोऽवन उपान्तिनाङ्कः स्यात् । तत्रचि-

$३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ९ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३$
 $\times ३$ । इन अङ्कों में से एक-एक लेकर घात किया तो $३ \times ३ \times ३ = २७$ ।
 यही वनमूल हुआ।

अभ्यासार्थ प्रश्नाः—

वनमूल बताओ—

- (१) ४६६५६ (२) १०५८२३८१७ (३) १८५१९३ (४) ३७३२४८
 (५) ७०४९६९ (६) १५६२५ (७) २१९७ (८) ११७६४९।

इति वनमूलपरिशिष्टम्।

अथ भिन्नपरिक्रमाष्टकम्।

तत्रादावंशसवर्णनम्। तत्रापि भागजातौ करणसूत्रं वृत्तम्।
 अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेदविधानमेवम्।
 मियो हराभ्यामपवर्तितान्यां यद्वा हरांशौ सुधियाञ्च गुण्यौ ॥१॥

राश्योः हरांशौ अन्योन्यहाराभिहतौ (कायौ), एवं समच्छेदविधानं
 स्यात्। यद्वा अपवर्तितान्यां हरान्यां हरांशौ सुधिया अत्र नियः गुण्यौ
 (गुणनीयौ) तदा समच्छेदविधिः स्यादिति ॥ १ ॥

इस सूत्र में अङ्कों की सवर्णता और भाग-जाति की क्रिया कही गयी है।
 विधि यह है कि एक राशि के हर से दूसरी राशि के हर और अंश को गुणा
 करे, फिर दूसरी राशि के हर से प्रथम राशि के हर और अंश को गुणा करे।
 इस तरह क्रिया करने पर समच्छेद (सब में तुल्य हर) होगा है। तुल्य हर
 होने के बाद यदि भिन्नाङ्कों का योग करना हो तो ऊपर वाले अङ्कों का योग
 कर नीचे में तुल्य हर को रखने में योग होगा। अन्तर करना हो तो अन्तर
 कर नीचे में तुल्य हर देने से भिन्नाङ्कों का अन्तर होगा। अथवा संभव रहने
 पर किसी अङ्क से हरों को अपवर्तन देकर, उन अपवर्तित हरों से परस्पर हर
 और अंश को गुणा करने पर भी समच्छेद होता है। इसे भागजाति कहते हैं।

जैसे $\frac{३}{३} + \frac{१}{३} = \frac{३}{३} = \frac{४}{३} =$ योगफल।

अत्रोद्देशकः ।

रूपत्रयं पञ्चलवत्रिभागो योगार्थमेतान् वद तुल्यहारान् ।

त्रिपष्टिभागश्च चतुर्दशांशः समच्छेदौ मित्र वियोजनार्थम् ॥ १ ॥

हे मित्र ! योग करने के लिये $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ इन भिन्नांशों का तथा अन्तर करने के लिये $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{४}$ इनका समच्छेद बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । $\frac{३}{४}$ $\frac{१}{२}$ $\frac{३}{४}$ ।

जाताः समच्छेदाः $\frac{५}{८}$ $\frac{३}{४}$ $\frac{५}{८}$ । योगे जातम् $\frac{५}{८}$ ।

अथ द्वितीयोदाहरणार्थं न्यासः $\frac{१}{४}$ $\frac{१}{४}$ ।

सप्तापवर्तिताभ्यां हराभ्यां ६, २ संगुणितौ, समच्छेदौ $\frac{५}{८}$ $\frac{५}{८}$ । वियोजिते जातम् $\frac{५}{८}$ ।

इति भागजातिः ।

उदाहरण— $\frac{३}{४}$ $\frac{१}{२}$ $\frac{३}{४}$ इनका योग करना है अतः सूत्र के अनुसार प्रत्येक राशि के हर से शेष राशियों के हरों और अंशों को आपस में गुणा कर योग करने से— $\frac{३ \times ५ \times ३}{४ \times २ \times ३} + \frac{१ \times १ \times ३}{४ \times २ \times ३} + \frac{३ \times १ \times ३}{३ \times ५ \times ४} = \frac{५}{८} + \frac{३}{४} + \frac{५}{८} = \frac{५}{८} =$ उत्तर ।

$\frac{१}{४}$, $\frac{१}{४}$ इन दोनों का अन्तर करना है अतः पहली रीति से समच्छेद कर अन्तर करने से— $\frac{१ \times ३}{४ \times ४} - \frac{१ \times १}{४ \times ४} = \frac{२}{१६} = \frac{१}{८} = \frac{१}{८} =$ उत्तर ।

दूसरी रीति से— $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{४}$ यहाँ हरों को ७ से अपवर्तन देने से क्रम से २ और १ हुये । इनसे परस्पर हर और अंश को गुणा करने पर $\frac{५}{८}$, $\frac{५}{८}$ हुये । दोनों का अन्तर करने से $\frac{५}{८} - \frac{५}{८} = \frac{१}{८} = \frac{१}{८} =$ उत्तर ।

अथ प्रभागजातौ करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

लवा लवत्राश्च हरा हरत्रा भागप्रभागेषु सवर्णनं स्यात् ।

भागप्रभागेषु (प्रभागजातौ) लवा लवत्राः (अंशाः अंशैर्गुणिताः) हरा हरत्राश्च (हराश्च हरैर्गुणिताः) कार्यास्तदा सवर्णनं स्यादिति ।

प्रभागजाति वह कहलाती है जिसमें भाग का भी भाग लिया जाय । प्रभागजाति में अंशों से अंशों को और हरों से हरों को गुणा करने पर समच्छेद होता है । जैसे २ के अष्टमांश का तृतीयांश क्या होगा ? यहाँ $\frac{२}{३}$ $\frac{१}{३}$ इनके अंशों को अंशों से और हरों को हरों से गुणा करने पर— $\frac{२ \times १ \times १}{३ \times ३ \times ३} = \frac{२}{२७} = \frac{१}{१३.५} =$ उत्तर ।

स्वांशाधिकोनः खलु यत्र तत्र भागानुबन्धे च लवापवाहे ।

तलस्थहारेण हरं निहन्यात् स्वांशाधिकोनेन तु तेन भागान् ॥३॥

चेत् एकस्य भागा अधिकोनकाः कर्तव्यास्तदा द्वेद्वन्तरूपेषु लवाः घननं कार्यम् । यत्र खलु स्वांशः अधिकोनः तत्र भागानुबन्धे लवापवाहे च तलस्थ-हारेण हरं निहन्यात्, एवं स्वांशाधिकोनेन तु तेन (हरेण) भागान् निहन्यात् ।

यदि किसी एक रूप का भाग अधिक हो वा न्यून हो, अर्थात् किसी एक अङ्क का कोई भाग दूसरे अङ्क में जोड़ा या घटाया जाय, तो रूप को हर से गुणाकर अंश को घन, ऋग के अनुसार घन या ऋग करें । जैसे २ में $\frac{1}{2}$ जोड़ना है, तो रूप २ को हर ४ से गुणा कर १ अंश जोड़ दिया तो $२ \times ४ = ८$, $\frac{८+१}{४} = \frac{९}{४}$ हुआ । घटाना रहता तो ८ में १ घटाकर $\frac{७}{४}$ होता । तिस भागानु-बन्ध और भागापवाह में अपना ही कोई भाग किसी संख्या में जोड़ा या घटाया जाय, वहाँ नीचे के हर से दूसरे के हर को गुणा करें और अपने अंश को घन, ऋग के अनुसार अपने हर में घन या ऋग कर जो शेष बचे उससे दूसरे के अंश को गुणा करें तो स्वर्गन होता है । जैसे $\frac{१}{२}$ में अपना $\frac{१}{३}$ जोड़ना है, तो नीचे के २ हर से ऊपर वाले ४ हर को गुणा करने पर १२ हुआ । यहाँ घन करना है अतः २ हर में १ अंश को जोड़कर ऊपर वाले अंश को गुणा किया तो ४ हुआ अतः $\frac{४+१}{२} = \frac{५}{२}$ हुआ । यही उन दोनों का योगफल आया ।

उपपत्ति:—अयांशस्य योगेन राशौ भागानुबन्धस्तथा तद्वियोगेन भागाप-वाहो भवतीति ज्ञेयम् । तत्र करण्यते—अ = $\frac{व}{स} = \frac{अ. स \div व}{स}$ एतेनोपपद्यं पूर्वा-

घनम् । यदि $\frac{अ}{व} = \frac{अ}{व} \cdot \frac{स}{प}$ इति करण्यते तदात्र समच्छेदादिकृते $\frac{अ. प}{व. प} =$

$\frac{अ. स}{व. प} = \frac{अ (प \div स)}{व. प}$ अत उपपद्यनुत्तरार्थमिति ।

अत्रोद्देशकः ।

साङ्गि द्वयं त्रयं व्यङ्गि कीदृग्नुहि स्वर्णितम् ।

जानास्यंशानुबन्धं चेत् तथा भागापवाहनम् ॥ १ ॥

हे मित्र ! भागानुबन्ध और भागापवाह यदि नून जानते हो, तो २ में $\frac{१}{३}$ जोड़ने से और ३ में $\frac{१}{४}$ घटाने से क्या होगा ? बताओ ।

लिल्लने पर $\frac{१}{३} \times \frac{५}{६} = \frac{५}{१८}$ हुआ। इसमें $\frac{५}{१८}$ को उक्त रीति से घटाया तो $\frac{५}{१८} - \frac{३}{१८} = \frac{५-३}{१८} = \frac{२}{१८} = \frac{१}{९}$ यह उत्तर हुआ।

तीसरे प्रश्न में $\frac{३}{४}$ में $\frac{३}{४}$ को घटाना है, तो सूत्र के अनुसार $\frac{३}{४} - \frac{३}{४} = \frac{३-३}{४} = \frac{०}{४} = ०$ यह शेष बचा, अब $\frac{५}{६}$ में $\frac{३}{४}$ को जोड़ना है, अतः उक्त रीति से जोड़ने पर $\frac{५}{६} + \frac{३}{४} = \frac{५ \times ४ + ३ \times ६}{६ \times ४} = \frac{२० + १८}{२४} = \frac{३८}{२४} = \frac{१९}{६}$ यह उत्तर हुआ ॥ २ ॥

इति जातिचतुष्टयम् ।

अथ भिन्नसङ्कलितव्यवकलितयोः करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

योगोऽन्तरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः ॥

तुल्यहरांशकानां योगोऽन्तरं कार्यम् । अहारराशेः रूपं हरः कल्प्यः ।

तुल्य हर वाले अंशों का ही योग वा अन्तर करना चाहिए। जिस राशि में हर न हो वहाँ हर की जगह १ कल्पना कर समच्छेद करना चाहिए।

उपपत्तिः—समानजातीयानामङ्गानामेव योगोऽन्तरं वा भवतीति नियमात् सूत्रोक्तं सर्वमुपपद्यते । हरस्थाने रूपकल्पनेन विकारानामावात्तयोक्तमिति ।

अत्रोद्देशकः ।

पञ्चांशपादत्रिलवार्धपद्यानेकीकृतान् ब्रूहि सखे नमैतान् ।

एभिश्च भागैरथ वर्जितानां किं स्यात् त्रयाणां कथयाशु शेषम् ॥ १ ॥

हे मित्र ! $\frac{५}{६}, \frac{३}{४}, \frac{३}{४}, \frac{३}{४}, \frac{३}{४}$ इनका योगफल बताओ और योगफल को ३ में घटा कर शेष कहो ।

न्यासः । $\frac{५}{६} \frac{३}{४} \frac{३}{४} \frac{३}{४} \frac{३}{४}$ ।

एक्ये जातम् $\frac{३९}{२४}$ ।

अथैतैर्विजितानां त्रयाणां शेषम् $\frac{३९}{२४}$ ।

इति भिन्नसङ्कलितव्यवकलिते ।

उदाहरण— $\frac{५}{६}, \frac{३}{४}, \frac{३}{४}, \frac{३}{४}, \frac{३}{४}$, इनका योग करना है अतः समच्छेद कर जोड़ने से— $\frac{५ \times ४ + ३ \times ६ + ३ \times ६ + ३ \times ६ + ३ \times ६}{६ \times ४} = \frac{२० + १८ + १८ + १८ + १८}{२४} = \frac{९०}{२४} = \frac{३९}{६}$ = उत्तर ।

अब $\frac{३९}{६}$ को ३ में घटाया, तो $३ - \frac{३९}{६} = \frac{६० - ३९}{६} = \frac{२१}{६} = \frac{७}{२}$ = उत्तर ।

इति भिन्नसङ्कलितव्यवकलिते ।

भिन्न भाग में भाजक के अंश और हर को उलटा लिख कर शेष क्रिया भिन्न गुणा की तरह करने से भागफल होता है। जैसे $\frac{1}{2}$ को $\frac{1}{3}$ से भाग देना है, तो भाजक $\frac{1}{3}$ को उलटा लिखने से $\frac{3}{1}$ हुआ, इससे $\frac{1}{2}$ को गुणा किया तो $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ यह भागफल हुआ।

उपपत्ति:—कल्प्यते—भाज्यः = $\frac{अ}{क}$ भाजकः = $\frac{ग}{घ}$ ∴ अ = भाज्य × क,

ग = भाजक × घ । एवं $\frac{अ}{ग} = \frac{भाज्य \times क}{भाजक \times घ}$ ∴ $\frac{अ \times घ}{ग \times क} = \frac{भाज्य \times घ \times क}{भाजक \times घ \times क}$

= $\frac{भाज्य}{भाजक}$ ∴ $\frac{भाज्य}{भाजक} = \frac{अ \times घ}{ग \times क}$ अत उपपन्नम् ।

अत्रोद्देशकः ।

सत्र्यंशरूपद्वितयेन पञ्च त्र्यंशेन पञ्च वद मे विभज्य ।

दर्भायगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिश्चेदस्ति ते भिन्नहृतौ समर्था ॥ १ ॥

हे मित्र! यदि तेरी बुद्धि भिन्न भाग की विधि में कुशाग्र की तरह तेज है, तो ५ को $(2 + \frac{1}{3})$ से और $\frac{1}{3}$ को $\frac{1}{3}$ से भाग देकर उन्निव वताओ ।

न्यासः— $2\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ । $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ । ययोक्त्वरणेन जातम् $\frac{16}{3}$ ।

इति भिन्नभागहारः ।

उदाहरण—५ को $(2 + \frac{1}{3})$ से भाग देना है, अतः $2 + \frac{1}{3}$ को सवर्णन क्रिया तो $\frac{6}{3}$ हुआ। अब सूत्र के अनुसार भाग देने पर $5 \div \frac{6}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{6} = \frac{15}{6}$ यह भागफल आया। इसी तरह $\frac{1}{3}$ को $\frac{1}{3}$ से भाग दिया तो $\frac{1}{3} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{3} = 1$ उत्तर हुआ।

अथ भिन्नवर्गादीं करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

वर्गे कृती घनविधौ तु घनौ विधेयौ ।

हारांशयोरथ पदे च पदप्रसिद्धयै ॥ ५ ॥

भिन्नवर्गे हारांशयोः कृती विधेयौ, घनविधौ तु हारांशयोः घनौ विधेयौ ।
अथ पदप्रसिद्धयै हारांशयोः पदे विधेये ॥

किसी भिन्न अङ्क का वर्ग या घन करना हो, तो हर और अंश दोनों का

६, ४ और ३ लघुघर्या हुईं। इनसे अपने २ अंशों को गुगा करने पर क्रम से २०, २४, १८, १६, ९ हुये। इनको अंशों के स्थान में लिखकर जोड़ा तो—

$$\frac{२०+२४+१८+१६+९}{६०} = \frac{६७}{६०} = \frac{३३}{३०} = १\frac{३}{३०} = \text{उत्तर।}$$

इसी तरह अन्तर में पूर्वोक्त क्रिया करके बताना चाहिये। जैसे $\frac{१५}{६०} - \frac{१}{६} - \frac{३}{६} - \frac{३}{६}$ यहाँ हरो का लघुतम १०५ हुआ। अब उक्तरीति से—

$$\frac{१५ \times १०५ - १ \times १०५ - ३ \times २१ - ३ \times ३५}{६०५} = \frac{१५५५ - १०५ - ६३ - १०५ - १०५}{६०५}$$

$$= \frac{१३३५}{६०५} = १२\frac{६३५}{६०५} = \text{अन्तर।}$$

अभ्यासाय प्रश्नाः।

योग और अन्तर बताओ।

- (१) $\frac{३}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६}$ । (२) $५\frac{३}{६} + २\frac{३}{६} + ३\frac{३}{६} + १\frac{३}{६}$ । (३) $२३ + ८\frac{३}{६} + ३\frac{३}{६}$ । (४) $५\frac{३}{६} + \frac{३\frac{३}{६}}{६} + \frac{३\frac{३}{६}}{६}$ । (५) $८\frac{३}{६} - ७\frac{३}{६}$ । (६) $३१\frac{३}{६} - २८\frac{३}{६}$ । (७) $१२\frac{३}{६} - २\frac{३}{६}$ । (८) $\frac{१\frac{३}{६}}{६} - \frac{३}{६}$ । (९) $३\frac{३}{६} + ४\frac{३}{६} - \frac{३}{६}$ । (१०) $\frac{३}{६} - \frac{३}{६} + \frac{३}{६}$ ।

गुगा करो।

- (१) $\frac{५}{६}$ को $\frac{५}{६}$ से। (२) $४\frac{३}{६}$ को १८ से। (३) $३१\frac{३}{६}$ को ४३ से।
 (४) $३१\frac{३}{६}$ को २१ से। (५) $\frac{१५}{६} \times \frac{३५}{६} \times \frac{१०}{६}$ । (६) $\frac{५}{६} \times \frac{३३५}{६} \times \frac{१५}{६}$ ।

भागफल निकालो।

- (१) $\frac{५}{६} \div ९$ । (२) $\frac{५}{६} \div ६५$ । (३) $२१\frac{३}{६} \div ७$ । (४) $३२५\frac{३}{६} \div १५$ । (५) $\frac{५}{६} \div \frac{३५}{६}$ । (६) $३\frac{३}{६} \div \frac{३५}{६}$ । (७) $\frac{५}{६} \div \frac{३५}{६}$ ।

सरल करने की विधि।

त्रिस भिन्नाङ्क को सरल करना हो, उसके अंश और हर दोनों के उत्पादक निकाल कर जो टुकड़े हर और अंश दोनों में सामिल हों उनको छोड़कर अंश के बाकी टुकड़ों के गुणफल को अंश की जगह में तथा हर के बाकी टुकड़ों के गुणफल को हर की जगह लिखने से सरल मान होता है।

जैसे—
$$\frac{१०००००}{५५५५५५} = \frac{५ \times २०१६०}{५ \times २३३३३३} = \frac{५ \times ५ \times ४०३३}{५ \times ५ \times ४६००} = \frac{५ \times ५ \times ४ \times १०००}{५ \times ५ \times ४ \times ५५६}$$

$$= \frac{५ \times ५ \times ४ \times ४ \times २५३}{५ \times ५ \times ४ \times ४ \times २००} = \frac{५ \times ५ \times ४ \times ४ \times ४ \times ६३}{५ \times ५ \times ४ \times ४ \times ४ \times ५०} = \frac{५ \times ५ \times ४ \times ४ \times ४ \times ६३}{५ \times ५ \times ४ \times ४ \times ४ \times ६३}$$

$$= \frac{५}{६} = \text{उत्तर।}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2} \div \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{25 + 12 + 1}{2} = \frac{38}{2} \\
 &= \frac{19}{1} = 19 \text{ उत्तर}
 \end{aligned}$$

अभ्यासाय प्रश्नाः—

सरल करो :—

(१) $2\frac{1}{2} \div 5\frac{1}{2}$ का $2\frac{1}{2}$

(२) $1\frac{1}{2}$ का $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ का $2\frac{1}{2}$

(३) $1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2}$ का $2\frac{1}{2}$

(४) $11\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

(५) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \div \frac{9}{10} - \frac{1}{10}$

(६) $\frac{5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2} + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}}}$

(७) $\frac{1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}} \div \frac{3\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{2}}$

(८) $\frac{2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} + \frac{2 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} - 4 + \frac{1}{2}$ का $\frac{1}{2}$

कोष्ठों का प्रयोग :—

(), { }, [], इन चिह्नों को क्रम से छोटा, मध्यम और बड़ा कोष्ठ कहते हैं। यदि किसी पद में ये तीनों कोष्ठ या इनमें से कोई दो हों, तो सबसे पहले छोटे कोष्ठ के भीतर की क्रिया होती है, उसके बाद मध्यम कोष्ठ की तथा अन्त में बड़े कोष्ठ की क्रिया होती है। इन कोष्ठों को तोड़ने के बाद कोष्ठ के बाहर की क्रिया होनी चाहिये।

यदि किसी संख्या और कोष्ठ के बीच में कोई चिह्न नहीं हो, तो वहाँ गुणा का चिह्न समझना चाहिये।

यथा ५ (१५ + २३), इसका मतलब ५ × (१५ + २३) है।

$$= \frac{\frac{13}{2} - \frac{3}{2} \text{ का } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\right) \text{ का } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{13}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{13-3-1}{2}\right) \text{ का } \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{9-1-1-1}{2}}{\frac{9-1-1-1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{6}{2}}{\frac{6}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 2} = \frac{9}{4} \text{ उत्तर ।}$$

अभ्यासाय प्रश्न :-

सरल करो :-

(१) $2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$, (२) $(5 - 1\frac{1}{2}) \times 2\frac{1}{2}$

(३) $(2 - 1\frac{1}{2}) \times 10\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2}$

(४) $3 + \left\{2\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\right)\right\}$

(५) $15 - 1\frac{1}{2} + \left\{1\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right\}$

(६) $\frac{2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \text{ का } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \div 12\frac{1}{2}$

(७) $\frac{1 + 4\frac{1}{2} \left(1 + 4\frac{1}{2}\right)}{1 + 2\frac{1}{2} \left(1 + 2\frac{1}{2}\right)} \text{ का } 2\frac{1}{2}$

(८) $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$

(९) $2 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$

(१०) $\frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{5 - \frac{1}{2}}$

(११) $\frac{2\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2} \text{ का } 2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}}$

(१२) $\left\{ \frac{2}{2 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \text{ का } \left(5 - \frac{2}{2 - \frac{1}{2}}\right) \right\} \div \frac{1}{2\frac{1}{2}}$

(१३) $\frac{2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\left(2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}$

जैसे—५.३२८६३

२.१४३२

८.२६७५

०.७३२१

१६.४७१४३

उत्तर

दशमलव के घटाव में भी इसी तरह अङ्कों को रखकर अन्तर करना चाहिये ।

यथा—१५.२५७९

३.१२५८

१२.१३२१

उत्तर

अभ्यासार्थ उदाहरण ।

जोड़ो ।

- (१) ३२.१५६७०३ + ३२.५९८६ + ५४३.२१६८३ ।
 (२) ८५३२१.३२५६ + ०.२१९८७ + १२.३५१२३ ।
 (३) १०३३००३.९३२१८६ + २२.१८७९ + २.१०३५०२१ ।
 (४) ५०.०००३१ + २४३.१०५ + ०.७८० + ०.६५४३२१ ।
 (५) ८०५६.१९८३ + १.३२१८७ + ३२.३०८ + १२१.९६३५२ ।

घटाओ ।

- (६) ३४.२०९ को ५३.३२१ में ।
 (७) ८७३२.१५२३ को ९७३६५.३४६२१ में ।
 (८) २५६७.३८५४ को ८३२१७.२३५१ में ।
 (९) ३२०५८०७ को १२३.७३२१ में ।
 (१०) ०.४३२१८ को ३४.५३२ में ।

दशमलव का गुणा

३—साधारण गुणा की तरह गुण्य और गुणक को गुणा कर दोनों में जितने अङ्क दशमलव में हों उनके याग के बराबर स्थान तक गुणनफल में द्वाइँ की जगह से पीछे की ओर गिन कर दशमलव का चिह्न रखें ।

अब भाज्य के पूर्णाङ्क ४५ में भाजक २५ से भाग देने पर लब्धि १ हुई शेष २० रहा, चूँकि भाज्य में पूर्णाङ्क की जगह अब कोई अंक नहीं है, अतः भागफल में १ के बाद दशमलव का चिह्न रखा। इसके बाद साधारण रीति से शेष-क्रिया करने से भागफल होता है।:

(२) भाज्य ३४५८१ भाजक ३२५ यहाँ भाजक में एक भी अङ्क दशमलव में नहीं है, अतः भाज्य में दशमलव का चिह्न वैसे ही रह गया। भाज्य में पूर्णाङ्क की जगह कोई अङ्क नहीं रहने के कारण लब्धि में पूर्णाङ्क की जगह कोई अङ्क नहीं होगा, अर्थात् सभी अङ्क दशमलव चिह्न के बाद ही होंगे।

यहाँ भाज्य का पहला अङ्क ३ में ही ३२५ से भाग देना चाहिये। इस तरह करने पर पहली जगह दशमलव में शून्य लब्धि हुई, शेष ३ पर ४ उतारने पर ३४ हुआ। अब साधारण रीति से भाग देने पर—

$$३२५) ३४५८१ (१००१०६३०३२७६९२ \text{ आदि हुए।}$$

$$\begin{array}{r}
 ३२५ \\
 \hline
 २०८१ \\
 १९५० \\
 \hline
 १३१० \\
 १३०० \\
 \hline
 १००० \\
 ९७५ \\
 \hline
 २५०० \\
 २२७५ \\
 \hline
 २२५० \\
 १९५० \\
 \hline
 ३००० \\
 २९२५ \\
 \hline
 ७५० \\
 ६५० \\
 \hline
 १००
 \end{array}$$

दशमलव का वर्ग

(६) जिस दशमलव का वर्ग करना हो, उसका साधारण रीति से वर्ग करके, उस दशमलव भिन्न में जितने अङ्क दशमलव में हों, उससे दूने अङ्क इकाई की जगह से गिनकर वर्ग दशमलव में रहना चाहिये ।

यथा $\cdot २३$ का वर्ग करना है, तो यहाँ साधारण रीति से २३ का वर्ग करने पर $२३ \times २३ = ५२९$ हुआ, यहाँ $\cdot २३$ में दो अङ्क दशमलव में हैं, अतः इसके वर्ग में चार अङ्क दशमलव में रखने पर $\cdot ०५२९$ हुआ $\therefore \cdot २३$ का वर्ग $\cdot ०५२९$ हुआ ।

दशमलव का घन

(७) साधारण रीति से घन निकाल कर जितने अङ्क उस संख्या में दशमलव में हों उससे त्रिगुणित अङ्क घन संख्या में इकाई की जगह से बाँई ओर गिनकर दशमलव का चिह्न रखना चाहिये । यदि उतने अङ्क घन में नहीं हों तो जितने कम हों उतने शून्य पीछे रखकर पूरा कर लेना चाहिये ।

यथा $\cdot २७$ का घन करना है, तो यहाँ साधारण रीति से २७ का घन १९६८३ हुआ, यहाँ $\cdot २७$ में दो अङ्क दशमलव में हैं अतः घन में $(२ \times ३ =) ६$ अङ्क दशमलव में दायीं से बायीं ओर गिनकर रखने होंगे, लेकिन यहाँ घन में ५ ही अङ्क है, अतः १९६८३ की बायीं ओर एक शून्य रख कर बाद में दशमलव चिह्न रखा तो $\cdot ०१९६८३$ हुआ यही $\cdot २७$ का घन हुआ ।

दशमलव का वर्गमूल

(८) जिस दशमलव संख्या का वर्गमूल निकालना हो उस दशमलव में अङ्कों की संख्या सम होनी चाहिये, यदि वह विषम हो तो उसमें दशमलव के अङ्कों के बाद एक शून्य रखकर उसे सम बना लेना चाहिये । इसके बाद साधारण रीति से वर्गमूल निकाल कर उस संख्या में जितने अङ्क दशमलव में हों, उससे आधे अङ्क वर्गमूल में दायीं से बायीं ओर गिनकर दशमलव में रखना चाहिये ।

यथा— ८८२०९ इसका वर्गमूल निकालने पर २९७ हुआ । यहाँ उक्त

उनमें भाग की क्रिया पूरी नहीं होती और भाग फल का अन्त नहीं होता ।
ऐसे दशमलव में कुछ अङ्क बार-बार आते हैं, अतः इन्हें आवर्त दशमलव कहते
हैं, और वे अङ्क जो बार-बार आते हैं, आवर्त कहलाते हैं ।

यथा $\frac{1}{3}$ इसको दशमलव के रूप में लाने पर $0.333333\cdots$ हुआ ।
यहाँ भाग फल का अन्त नहीं होता है और एक ही अङ्क (३) बार-बार आता
है । अतः यह आवर्त दशमलव है ।

इसी तरह $\frac{2}{3} = 0.666666\cdots$

और $\frac{1}{4} = 0.252525\cdots$

(१०) आवर्त दशमलव को लिखने में आवर्त अङ्कों को एक बार लिख
कर पहले और अन्तिम अङ्क के ऊपर एक-एक बिन्दु रख देते हैं ।

यथा— $0.333333\cdots$ को $0.\dot{3}$ से सूचित करते हैं ।

$0.666666\cdots$ को $0.\dot{6}$ से सूचित करते हैं ।

और $0.252525\cdots$ को $0.\dot{2}5$ से सूचित करते हैं ।

(क) जिस आवर्त दशमलव में, दशमलव चिह्न के बाद पहले ही अङ्क
से आवर्त आरम्भ हो जाय, उसे शुद्ध आवर्त दशमलव कहते हैं ।

यथा— $0.\dot{3}$ और $0.\dot{6}$ से शुद्ध आवर्त दशमलव है ।

(ख) आवर्त दशमलव में आवर्त से पहले एक या अधिक अङ्क हों, उसे
मिश्र आवर्त दशमलव कहते हैं ।

यथा— $0.2\dot{5}$ यह मिश्र आवर्त दशमलव है ।

आवर्त दशमलव को भिन्न के रूप में लाना

(११) जिस आवर्त दशमलव को भिन्न में लाना हो, उसमें जितने अङ्क
पूर्णाङ्क, दशमलव तथा आवर्त में हों उनसे बनी संख्या में, आवर्त से पहले के
अङ्कों से बनी संख्या को घटा हर अंश की जगह लिखें और जितने अङ्क आवर्त
में हों, उतने नौ के ऊपर आवर्त और दशमलव के बिन्दुओं के बीच जितने
अङ्क हों, उतने शून्य रखकर हर की जगह में लिखें । इस तरह के अंश और
हर से बना हुआ भिन्न ही अभीष्ट भिन्न होगा ।

आवर्त दशमलव का योग और अन्तर

(१२) दशमलवों को परस्पर सङ्ग करके साधारण रीति से योग और अन्तर करना चाहिये, लेकिन योग और अन्तर के अन्तिम अङ्क में, वह अङ्क, जो आवर्त के प्रथम लक्ष्मी पङ्क्ति के अङ्कों से हाथ लगा हो, क्रम से जोड़ना और घटाना चाहिये ।

(१) यथा—२.३५४२, २३.८६४७ इनको जोड़ना है ।

यहाँ दशमलवों को आपस में मिला करने पर—

$$\left. \begin{array}{l} २.३५४२ = २.३५४२३५ \\ \text{और } २३.८६४७ = २३.८६४७४७ \end{array} \right\} \text{हुआः}$$

दोनों को जोड़ने पर २६.२१८९८२

यहाँ आवर्त की प्रथम लक्ष्मी पङ्क्ति के अङ्कों का योग = ४ + ४ = ८ है अतः यहाँ हाथ में कुछ नहीं रहने के कारण योगफल में कुछ नहीं जोड़ा गया ।

∴ अन्तीष्ट योग = २६.२१८९८२ उत्तर ।

(२) ९.५४३ और .६२५ को जोड़ना है, तो

$$९.५४३ = ९.५४३३$$

$$.६२५ = .६२५२$$

$$\underline{१०.१६८५} \quad \text{उत्तर}$$

(३) ८.३१, .६ और .००२ इनको जोड़ना है, तो

$$८.३१ = ८.३११$$

$$.६ = .६६६$$

$$\text{और } .००२ = .००२$$

$$\underline{८.९७९} = ८.९८ \quad \text{क्योंकि आवर्त में ९ रहने पर पिछले}$$

अङ्क में एक युत हो जाता है ।

छ मनी मंहाश्री में अनावर्त में बराबर अङ्क रहना चाहिये, और आवर्त में मनी आवर्तों के लघुतम के बराबर अङ्क रहना चाहिये । यहाँ पहले उदाहरण में आवर्त में क्रम से चार और दो अङ्क हैं, अतः जोड़ने के समय आवर्त में चार और दो के लघुतम चार के बराबर अङ्क रखे गये हैं । अनावर्त में एक में दो अङ्क हैं, अतः दूसरे में भी दो अङ्क अनावर्त में रखे गये हैं ।

$$\therefore \frac{\text{भाज्य}}{\text{भाजक}} = \frac{343}{44} \div \frac{100}{44} = \frac{343}{44} \times \frac{44}{100} = \frac{343}{100} = 3.43 \dots$$

(३) भाज्य $\cdot 2$ भाजक $\cdot 24$

यहाँ $\cdot 2 = \frac{2}{1}$ और $\cdot 24 = \frac{24}{1}$

$$\therefore \cdot 2 \div \cdot 24 = \frac{2}{1} \div \frac{24}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ उत्तर ।}$$

(४) भाज्य $\cdot 2856$ भाजक $\cdot 2200$

यहाँ भाज्य और भाजक को सदश करने पर

$$\left. \begin{aligned} \text{भाज्य} &= \cdot 28562856 \\ \text{भाजक} &= \cdot 22002200 \end{aligned} \right\} \text{दुपे}$$

अब दोनों को मिश्र में लाने पर

$$\text{भाज्य} = \frac{28562856 \times 22}{22002200} = \frac{28562856 \times 22}{22002200}$$

$$\text{भाजक} = \frac{22002200 \times 22}{22002200} = \frac{22002200 \times 22}{22002200}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{भाज्य}}{\text{भाजक}} &= \frac{28562856 \times 22}{22002200} \div \frac{22002200 \times 22}{22002200} \\ &= \frac{28562856 \times 22}{22002200} \times \frac{22002200}{22002200 \times 22} \\ &= \frac{28562856 \times 22}{22002200 \times 22} = \frac{28562856}{22002200} = 1.298181 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

अभ्यासाय प्रश्नाः—

(१) $5.2100 + 81.000000 + \cdot 2000$

(२) $0.6000 - \cdot 5000$

(३) 2.4000×2.0000

(४) $0.2000 \div 2.0000$

(५) $242.2200 \div 21.2100$

मिश्र प्रकरण

(१) अनिध राशि वह है, जो एक ही इकाई द्वारा प्रकट की जाय, जैसे ३ रुपये अनिध राशि है। एक से अधिक इकाइयों द्वारा प्रकट की जाने वाली राशि मिश्र राशि कहलाती है, यथा—३ रु० ७ आ० ६ पा० यह मिश्र राशि है। मिश्र राशि की इकाइयों एक दूसरी से सम्बन्धित रहती हैं, अतः प्रयोजन होने पर हम एक इकाई को दूसरी में परिवर्तित कर सकते हैं।

उत्तर में जाने की जगह लिखा। रुपये की जगह १५ में से १ चले जाने के बाद १४ रहा, इसमें १३ ह० घटाने पर १ ह० उत्तर में रुपये की जगह लिखा। इस तरह लिखने से १ ह० १२ आ० १० पा० उत्तर हुआ।

मिश्र गुणा

(४) ११ पौ० १३ शि० ९ पे० को १३ से गुणा करना है, तो यहाँ गुणा की तरह गुण्य और गुणक को न्यास करने पर—

	पौ०	शि०	पे०	}	हुआ
गुण्य =	११	१३	९		
गुणक	१३				
	१५१ पौ०	१८ शि०	९ पे०		उत्तर

९ को १३ से गुणा करने पर ११७ पे० = $११७ \div १२ = ९$ शि० + ९ पे० ९ पे० को उत्तर में पे० की जगह लिखा, और ९ शि० को हाथ में रखा, फिर १३ शि० को १३ से गुणा करने पर १६९ शि० इसमें हाथ के ९ शि० जोड़ने पर $१७८ \div २० = ८$ पौ० + १८ शिलिङ्ग हुआ। १८ शि० को उत्तर में शिलिङ्ग की जगह लिखा और ८ पौ० को हाथ लगाया। फिर ११ पौ० को १३ से गुणा करने पर १४३ पौ० हुआ, इसमें हाथ का ८ पौ० जोड़ने से $१४३ + ८ = १५१$ पौ० को उत्तर में पौण्ड की जगह लिखा इस तरह लिखने पर १५१ पौ० १८ शि० ९ पे० उत्तर हुआ।

मिश्र भाग

(५) १४४ ह० ७ आ० २ पा० को १४ से भाग देना है तो, यहाँ भाग की तरह न्यास करने पर निम्नलिखित रूप हुआ।

$$14 \Big) 144 \text{ ह० } 7 \text{ आ० } 2 \text{ पा० } \left(10 \text{ ह० } 4 \text{ आ० } 1 \text{ पा० } \right.$$

१४४ ह० में १४ से भाग देने पर लब्धि १० ह० को उत्तर में लिखा शेष ४ रुपये को १६ से गुणा करने से ६४ आ० हुये। इसमें भाज्य का ७ आ० जोड़ने से ७१ आ० हुये। ७१ आने में १४ से भाग देने पर लब्धि ५ आ०

(७)	दिन	घण्टा	मिनट	सेकण्ड
	३६४	२३	४३	१८
	०	५	३८	२३
(८)	गैलन	कार्ट	पाइन्ट	जिल
	१०	२	१	२
	५	४	०	१

गुणा करो :-

- (९) ४० मील ६ फर्लाङ्ग २१३ गज २ फीट १३ इञ्च को २१ से ।
 (१०) १५ अंश ३१ कला ५८ विकला १३ प्र० विकला को ३६० से ।
 (११) २२ पौ० ३८ शि० ९ पें० को ३३ से ।
 (१२) ५२५ रु० १३ आ० ११ पा० को १२१ से ।

भाग दो

- (१३) १३४० गैलन ३ कार्ट ५ पाइन्ट को ३०० से ।
 (१४) २७ पौ० ३ शि० २ पें० को ४९ से ।
 (१५) ३०० मन २० सेर ५ द्रॉक को ८५ से ।
 (१६) ८१ रु० ८ आ० ११ पा० को ९ से ।
 (१७) किसी मनुष्य का वार्षिक आय १०००००० रु० हैं, यदि उसको प्रति रुपये की दर से ३ पैसे इनकम टैक्स देना पड़े, तो वार्षिक आय में कितनी कमी होगी ।
 (१८) ५५२५ रु० १२ आ० राम और श्याम में इस तरह बाँटें कि राम को श्याम से ५ गुना मिले ।
 (१९) एक मनुष्य के मासिक आय ६० रु० १२ आ० है, और वह प्रति दो मास में उस आय का चौथा भाग बचाता है, तो वह ३० मास में जितना खर्च करता है, उतना बचाने में उसको कितना समय लगेगा ।
 (२०) एक मनुष्य ने २० बोड़े और २० भेंड़े मोल लिया, प्रत्येक बोड़े का

१० नये पैसे	=	१ रु० का $\frac{1}{10}$
५ " "	=	१ रु० का $\frac{1}{20}$
२ " "	=	१ रु० का $\frac{1}{50}$
१ " "	=	१ रु० का $\frac{1}{100}$

उदाहरण—

(१) ७ आ० ३ पा० प्रति वस्तु की दर से ९३८५१ वस्तु का दाम निकालना है ।

	रु०	आ०	पा०	
	९३८५१	०	०	प्रति वस्तु १ रु० की दर से
४ आ० = १ रु० का $\frac{1}{4}$	२३४६२	१२	०	" " ४ आ० " "
२ आ० = ४ आ० का $\frac{1}{2}$	११७३१	६	०	" " २ आ० " "
१ आ० = २ आ० का $\frac{1}{2}$	५८६५	३	०	" " १ आ० " "
३ पा० = १ आ० का $\frac{1}{3}$	१४६६	६	९	" " ३ पा० " "

४२५२६ रु० ३ आ० ९ पा०, ७आ० ३पा० की दर से

(२) ६ पौ० १२ शि० ५ पें० प्रति टन की दर से २५१३१२ टन का दाम बताओ ।

	पौ०	शि०	पें०	
	२५१३१२	०	०	प्रति टन १ पौ० की दर से
	१५०७८७२	०	०	" " ६ पौ० " "
१० शि० = १ पौ० का $\frac{1}{10}$	७५३९३६	०	०	" " १० शि० " "
२ शि० = १० शि० का $\frac{1}{5}$	१५०७८७	४	०	" " २ शि० " "
४ पें० = २ शि० का $\frac{1}{5}$	२५१३१	४	०	" " ४ पें० " "
१ पें० = ४ पें० का $\frac{1}{4}$	६२८२	१६	०	" " १ पें० " "

२४४४००९ पौ० ४ शि० ० पें०, प्रति टन ६ पौ० १२ शि० ५ पें० की दर से

निम्न लिखित प्रश्नों के उत्तर व्यवहार गणित की रीति से बताओ ।

- (१) ३ मन २७ सेर ८ द्र० का, १० रु० ५ आ० ८ पा० मन की दर से ।
- (२) १ मन १७ सेर १० द्र० का, ७ आ० ६ पा० सेर की दर से ।
- (३) ९ मन १७½ सेर का, ४ रु० १० आ० ८ पा० मन की दर से ।
- (४) ३ मन ३७ सेर १२ द्र० का, ७ शि० ६ पेंस की दर से ।
- (५) ७ बोरे मैदा का, जो प्रति बोरे में ३ मन १५ सेर है, ७ रु० १० आ० मन की दर से ।
- (६) ६ टन ३ हण्डर २ का० २४ पौ० का, १७ शि० ७ पेंस हण्डर की दर से ।
- (७) २५७ वस्तुओं का मोल बताओ जब कि १० उनमें से ३ रु० ९ आ० ४ पा० की हो ।

इति व्यवहार गणितम् ।

अथ शून्यपरिकर्मसु करणसूत्रमार्याद्वयम् ।

योगे खं शेषसमं, वर्गादौ खं, खभाजितो राशिः ।

खहरः स्यात्, खगुणः खं, खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ॥१॥

शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः ।

अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितश्च युतः ॥२॥

खं (शून्यं प्रति) योगे शेषसमं स्यात् । खस्य वर्गादौ खं स्यात् । खभाजितः राशिः खहरः स्यात् । खगुणः राशिः खं भवेत् । शेषविधौ खगुणः चिन्त्यः । शून्ये गुणके जातेचेत् खं हारः स्यात् तदा राशिः पुनः अविकृत एव ज्ञेयः । तथैव खेन अनितः युतश्च राशिः अविकृतः एव ज्ञेयः ॥ २ ॥

शून्य में किसी संख्या को जोड़ने पर योगफल उस संख्या के तुल्य ही होता है । शून्य के वर्गादि शून्य ही होते हैं । किसी राशि को शून्य से भाग देने से उस राशि की संज्ञा खहर होती है । शून्य से किसी राशि को गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है । यदि किसी राशि को शून्य से गुणा किया जाय और शून्य से ही भाग दिया जाय तो राशि अविकृत (ज्यों की त्यों) रहती है । इसी तरह शून्य के जोड़ने और घटाने में भी समझना चाहिए ॥

उपपत्तिः—शून्यस्यानावद्योतकःवाचेन सह शेषस्य योगे कृते सति योगफलं शेषसमं भवत्येव । एवं शून्यस्य वर्गादयोऽपि शून्यमेवस्यादिति विदां

‘स्वांशाधिकोने’ इस सूत्र से $२ + १ = ३$ हुआ। इससे २१ में भाग दिया तो ७ लब्धि आई। इसे २१ में घटाने से १४ हुआ। यही प्रश्न की राशि हुई।

इति शून्य परिकर्माष्टकम् ।

अथ व्यस्तविधौ करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

छेदं गुणं गुणं छेदं वर्गं मूलं पदं कृतिम् ।

ऋणं स्वं स्वमृणं कुर्याद् दृश्ये राशिप्रसिद्धये ॥ १ ॥

अथ स्वांशाधिकोने तु लवाद्बोनो हरो हरः ।

अंशस्त्वविकृतस्तत्र विलोमे शेषमुक्तवत् ॥ २ ॥

विलोमे (व्यस्तविधौ) राशिप्रसिद्धये दृश्ये छेदं गुणं, गुणं छेदं, वर्गं मूलं, पदं कृतिं, ऋणं स्वं, स्वं च ऋणं, कुर्यात् । अथ स्वांशाधिकोने तु लवाद्बोनो हरो हरः कार्यः । तत्र अंशस्तु अविकृत एव स्याप्यः शेषम् उक्तवदेव कार्यम् ॥ १-२ ॥

उक्त रीति से राशि जानने के लिए दृश्य अङ्क में भाजक को गुणक, गुणक को हर, वर्ग को मूल, मूल को वर्ग, ऋण को घन और योग को घटाव की क्रिया करनी चाहिए। जहाँ पर अपना अंश जोड़ा या घटाया गया हो, वहाँ क्रम से हर में अंश को जोड़ कर या घटा कर हर कक्षना करें। अंक को वैसा ही रख कर शेष क्रिया पहले की तरह करने से राशि का ज्ञान होता है ॥

$$\text{उपपत्ति:—कक्ष्यने } x = \sqrt{\left(\frac{रा \times अ + क}{ग}\right)^2 - व}$$

$$\therefore x^2 = \left(\frac{रा \times अ + क}{ग}\right)^2 - व \therefore x^2 + व = \left(\frac{रा \times अ + क}{ग}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2 + व} = \frac{रा \times अ + क}{ग} \therefore ग \sqrt{x^2 + व} = रा \times अ + क ।$$

$$\therefore रा \times अ = ग \sqrt{x^2 + व} - क \therefore रा = \frac{ग \sqrt{x^2 + व} - क}{अ}$$

अनेन ‘छेदं गुणं गुणं छेदं’ नित्युपपन्नम् ।

न्यासः । गुणः ५ । ऊन ३ । हरः १० । राश्यंशाः ३ ३ ३
दृश्यम् ६ = ।

अत्र किल कल्पितराशिः ३ । पंचन्नः १५ स्वत्रिभागोनः १० । दश-
भक्तः १ । कल्पित—३ राशेस्त्र्यंशार्धपादैः ३ ३ ३ समन्वितो हरो
जातः १५ । अथ दृष्टम् ६ = इष्टेन ३ गुणितम् २०४ । हरेण १५ भक्तं
जातो राशिः ४ = ।

एवं सर्वत्रोदाहरणे राशिः केनचिद् गुणितो भक्तो वा राश्यंशेन
रहितो युतो वा दृष्टस्तत्रेष्टं राशिं प्रकल्प्य तस्मिन्नुद्देशकालापवत् कर्मणि
कृते यन्निष्पद्यते तेन भजेद् दृष्टमिष्टगुणं फलं राशिः स्यात् ।

उदाहरण—यहाँ इष्ट ३ क्वचना किया, तब प्रश्न के अनुसार $३ \times ५ =$
 १५ । $१५ - \frac{१५}{३} = १५ - ५ = १०$ । $\frac{१०}{१०} = १$ । अब १ में कल्पित राशि (३)
का $\frac{३}{३}$, $\frac{३}{३}$ और $\frac{३}{३}$ जोड़ दिया तो $१ + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} = १ + १ + १ + \frac{३}{३} =$
 $\frac{५+५+६+३}{३} = \frac{१९}{३}$ हुआ । इष्ट (३) को दृष्ट ६८ से गुणाकर $\frac{१९}{३}$ से भाग देने
पर $३ \times ६८ \div \frac{१९}{३} = \frac{३ \times ६८ \times ३}{१९} = ३८$ उत्तर आया । यही प्रश्न की राशि है ।

अपरोदाहरणम् ।

अमलकमलराशेस्त्र्यंशपञ्चांशपष्टै-

खिनयनहरिसूर्या येन तुर्येण चार्या ।

गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपदैः

सकलकमलसङ्ख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य ॥ २ ॥

किसी पूजक ने अपनी कमल राशि का त्रिभाग ($\frac{१}{३}$) से शङ्कर की, पञ्चमांश
($\frac{१}{५}$) से विष्णु की, षष्टांश ($\frac{१}{६}$) से सूर्य की, चतुर्थांश ($\frac{१}{४}$) से देवी की और
बाकी ६ कमलों से गुरु चरणों की पूजा की, तो कुल कमल की संख्या
कीजिए बताओ ।

न्यासः ३ ३ ३ ३ ३ दृश्यम् ६ ।

अत्रेष्टमेकं १ राशिं प्रकल्प्य प्राग्ब्रज्जातो राशिः १२० ।

उदाहरण—इष्ट = १ है । अब सूत्र के अनुसार $\frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{४} =$
 $\frac{२०+१२+१०+१५}{६०} = \frac{५७}{६०}$, इसको इष्ट १ में बटाया, तो $१ - \frac{५७}{६०} = \frac{६०-५७}{६०} =$

न्यासः । गुणः ५ । ऊन ३ । हरः १० । राश्यंशाः ३ ३ ३
दृश्यम् ६ = १ ।

अत्र किल कल्पितराशिः ३ । पंचन्नः १५ स्वत्रिभागोनः १० । दश-
भक्तः १ । कल्पित—३ राशेस्त्र्यंशार्धपादैः ३ ३ ३ समन्वितो हरो
जातः १५ । अथ दृष्टम् ६ = इष्टेन ३ गुणितम् २०४ । इरेण १५ भक्तं
जातो राशिः ४ = १ ।

एवं सर्वत्रोदाहरणे राशिः केनचिद् गुणितो भक्तो वा राश्यंशेन
रहितो युतो वा दृष्टस्तत्रेष्टं राशिं प्रकल्प्य तस्मिन्नुद्देशकालापवत् कर्मणि
कृते यन्निष्पद्यते तेन भजेद् दृष्टमिष्टगुणं फलं राशिः स्यात् ।

उदाहरण—यहाँ इष्ट ३ क्वपना क्रिया, तब प्रश्न के अनुसार ३ × ५ =
१५ । १५ - ३ = १२ = १५ - ५ = १० । १० = १ । अब १ में कल्पित राशि (३)
का ३, ३ और ३ जोड़ दिया तो १ + ३ + ३ + ३ = १ + १ + ३ + ३ =
 $\frac{१+१+३+३}{४} = \frac{१६}{४}$ हुआ । इष्ट (३) को दृष्ट ६८ से गुणाकर १५ से भाग देने
पर ३ × ६८ ÷ १५ = $\frac{३ \times ६८ \times ४}{१५}$ = २८ उत्तर आया । यही प्रश्न की राशि है ।

अपरोदाहरणम् ।

अमलकमलराशेस्त्र्यंशपञ्चांशपष्टै-

खिनयनहरिसूर्या येन तुर्येण चार्या ।

गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपद्मैः

सकलकमलसङ्ख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य ॥ २ ॥

किसी पूजक ने अपनी कमल राशि का त्रिभाग (३) से शङ्कर की, पञ्चमांश
(५) से विष्णु की, षष्ठांश (६) से सूर्य की, चतुर्थांश (४) से देवी की और
बाकी १ कमलों से गुरु चरणों की पूजा की, तो कुल कमल की संख्या
कीजिए बताओ ।

न्यासः ३ ५ ३ ३ दृश्यम् ६ ।

अत्रेष्टमेकं १ राशिं प्रकल्प्य प्राग्ज्जातो राशिः १२० ।

उदाहरण—इष्ट = १ है । अब सूत्र के अनुसार ३ + ५ + ३ + ३ =
 $\frac{३०+१२+१०+१५}{६०} = \frac{६७}{६०}$, इसको इष्ट १ में घटाया, तो १ - $\frac{६७}{६०} = \frac{६०-६७}{६०} =$

न्यासः । गुणः ५ । ऊन ३ । हरः १० । राश्यंशाः ३ ३ ३
दृश्यम् ६८ ।

अत्र किल कल्पितराशिः ३ । पंचन्नः १५ स्वत्रिभागोनः १० । दश-
भक्तः १ । कल्पित—३ राशेस्त्र्यंशार्धपादैः ३ ३ ३ समन्वितो हरो
जातः १५ । अथ दृष्टम् ६८ इष्टेन ३ गुणितम् २०४ । हरेण १५ भक्तं
जातो राशिः ४८ ।

एवं सर्वत्रोदाहरणे राशिः केनचिद् गुणितो भक्तो वा राश्यंशेन
रहितो युतो वा दृष्टस्तत्रेष्टं राशिं प्रकल्प्य तस्मिन्नुद्देशकालापवत् कर्मणि
कृते यन्निष्पद्यते तेन भजेद् दृष्टमिष्टगुणं फलं राशिः स्यात् ।

उदाहरण—यहाँ इष्ट ३ कल्पना किया, तब प्रश्न के अनुसार $३ \times ५ =$
 १५ । $१५ - \frac{१५}{३} = १५ - ५ = १०$ । $\frac{१०}{३} = ३$ । अब ३ में कल्पित राशि (३)
का $\frac{३}{३}$, $\frac{३}{३}$ और $\frac{३}{३}$ जोड़ दिया तो $३ + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} = ३ + १ + १ + १ =$
 $\frac{५+५+६+३}{३} = \frac{१९}{३}$ हुआ । इष्ट (३) को दृष्ट ६८ से गुणाकर $\frac{१९}{३}$ से भाग देने
पर $३ \times ६८ \div \frac{१९}{३} = \frac{३ \times ६८ \times ३}{१९} = ४८$ उत्तर आया । यही प्रश्न की राशि है ।

अपरोदाहरणम् ।

अमलकमलराशेस्त्र्यंशपञ्चांशपष्टै-

खिनयनहरिसूर्या येन तुर्वेण चार्या ।

गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपदैः

सकलकमलसङ्ख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य ॥ २ ॥

किसी पूजक ने अपनी कमल राशि का त्रिभाग ($\frac{१}{३}$) से शङ्कर की, पञ्चमांश
($\frac{१}{५}$) से विष्णु की, षष्टांश ($\frac{१}{६}$) से सूर्य की, चतुर्थांश ($\frac{१}{४}$) से देवी की और
बाँकी १ कमलों से गुरु चरणों की पूजा की, तो कुल कमल की संख्या
कीजिए बताओ ।

न्यासः ३ ३ ३ ३ दृश्यम् ६ ।

अत्रेष्टमेकं १ राशिं प्रकल्प्य प्राग्ज्जातो राशिः १२० ।

उदाहरण—इष्ट = १ है । अब सूत्र के अनुसार $\frac{३}{३} + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} =$
 $\frac{२०+१२+१०+१५}{३} = \frac{५७}{३}$, इसको इष्ट १ में घटाया, तो $१ - \frac{५७}{३} = \frac{३-५७}{३} =$

न्यासः । गुणः ५ । ऊन ३ । हरः १० । राश्यंशाः ३ ३ ३
दृश्यम् ६ = १ ।

अत्र किल कल्पितराशिः ३ । पंचन्नः १५ स्वत्रिभागोनः १० । दश-
भक्तः १ । कल्पित—३ राशेस्त्र्यंशार्धपादैः ३ ३ ३ समन्वितो हरो
जातः १५ । अयं दृष्टम् ६ = इष्टेन ३ गुणितम् = १८ । हरेण १५ भक्तं
जातो राशिः ५ = १ ।

एवं सर्वत्रोदाहरणे राशिः केनचिद् गुणितो भक्तो वा राश्यंशेन
रहितो युतो वा दृष्टस्तत्रेष्टं राशिं प्रकल्प्य तस्मिन्नुद्देशकालापन्नं कर्मणि
कृते यन्निष्पद्यते तेन भजेद् दृष्टमिष्टगुणं फलं राशिः स्यात् ।

उदाहरण—यहाँ इष्ट ३ कल्पना क्रिया, तब प्रश्न के अनुसार $३ \times ५ =$
 १५ । $१५ - \frac{१५}{३} = १५ - ५ = १०$ । $\frac{१०}{३} = ३$ । अब ३ में कल्पित राशि (३)
का $\frac{३}{३}$, $\frac{३}{३}$ और $\frac{३}{३}$ जोड़ दिया तो $३ + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} = ३ + १ + १ + १ =$
 $\frac{५+५+५+५}{३} = \frac{१६}{३}$ हुआ । इष्ट (३) को दृष्ट ६० से गुणाकर $\frac{१६}{३}$ से भाग देने
पर $३ \times ६० \div \frac{१६}{३} = \frac{३ \times ६० \times ३}{१६} = ३८$ उत्तर आया । यही प्रश्न की राशि है ।

अपरोदाहरणम् ।

अमलकमलराशेस्त्र्यंशपञ्चांशपष्टै-

खिनयनहरिसूर्या येन तुर्येण चार्या ।

गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपदैः

सकलकमलसङ्ख्यां क्षिप्रमाह्वयाहि तस्य ॥ २ ॥

क्षिप्रि पृथक् ने अपनी कमल राशि का त्रिभाग ($\frac{३}{३}$) से शङ्कर की, पञ्चमांश
($\frac{५}{३}$) से विष्णु की, षष्ठांश ($\frac{६}{३}$) से सूर्य की, चतुर्थांश ($\frac{४}{३}$) से देवी की और
शेष १ कमलों से गुरु चरणों की पूजा की, तो कुल कमल की संख्या
सीधे बताओ ।

न्यासः ३ ५ ३ ३ ३ दृश्यम् ६ ।

अत्रेष्टमेकं १ राशि प्रकल्प्य प्राग्ब्रजातो राशिः १२० ।

उदाहरण—इष्ट = १ है । अब सूत्र के अनुसार $\frac{३}{३} + \frac{५}{३} + \frac{३}{३} + \frac{३}{३} =$
 $\frac{३०+१५+१०+१५}{३} = \frac{५०}{३}$, इसको इष्ट १ में घटाया, तो $१ - \frac{५०}{३} = \frac{३-५०}{३} =$

$$\frac{\text{रा (म-च) (ग-क)}{\text{ग} \times \text{म}} \therefore \text{रा} = \frac{\text{इ}}{\frac{(\text{म-च}) (\text{ग-क})}{\text{ग} \times \text{म}}} \text{ उपपन्नम् ।}$$

शेषजात्युदाहरणम् ।

स्वार्थं प्रादान् प्रयागे, नवलवयुगलं योऽवशेषाच्च काश्यां
 शेषाद्धि शुक्लहेतोः पथि दशमलवान् षट् च शेषाद् गयायाम् ।
 शिष्टा निष्कत्रिपष्टिर्निजगृहमनया तीर्थपान्थः प्रयात-
 स्तस्य द्रव्यप्रमाणं वद यदि भवता शेषजातिः श्रुताऽस्ति ॥ ३ ॥
 हे मित्र ! यदि तु शेष जाति गणित जानते हो, तो बताओ कि किसी
 तीर्थ यात्री ने अपने द्रव्य का भाधा (३) प्रयाग में, शेष के द्विगुणित नवम
 भाग (३) काशी में, फिर बचे हुये का चौथा भाग (१) नाग व्यय में, पुनः
 अवशिष्ट का षड्गुणित दशम भाग (६) गया में खर्च किया । इस रीति से
 खर्च करने पर भी जब उसके पास ६३ हरये बचे तब वह घर लौट गया, तो
 भाग्य में उसके पास कितने द्रव्य थे ।

न्यासः ३ हरयम् ६३ । अत्र रूपं १ राशि प्रकल्प्य भागान्
 शेषान् शेषादपास्य जातम् ३ ।
 अथ वा भागापवाहविधिना
 सवर्णिते जातम् ३ । अनेन दृष्टे
 ६३ इष्ट गुणिते भक्ते जातं द्रव्यप्रमाणम् ५४० । इदं विलोमसूत्रेणापि
 सिध्यति ।

उदाहरण—इष्ट राशि = १ । अतः भाधा ३ प्रयाग में दिया ।
 शेष = १ - ३ = ३ । ३ × ३ = ३ काशी में दिया ।
 शेष = ३ - ३ = ३ । ३ × १ = ३ रास्ते में दिया ।
 शेष = ३ - ३ = ३ । ३ × ६ = ३ गया में दिया ।
 ∴ कुल खर्च = ३ + ३ + ३ + ३ = ३ ।
 इसे इष्ट राशि में घटाने पर शेष द्रव्य = १ - ३ = ३ = ३ ।
 अब इससे इष्ट गुणित हरय में भाग देने—
 पर राशि = ६३ × १ ÷ ३ = ५४० ।

न्यासः $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ दृश्यम् १ ।

जातमलिकुलमानम् १५ । एवमन्यत्रापि ।

इतीष्टकर्म ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास करने पर $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ । $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \times 2 = (\frac{2-3}{6}) \times 2 = \frac{-1}{3} \times 2 = \frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$ । दृश्य = १ । अब चूत्र के अनुसार १ इष्ट में उररोक्त भागों का योग बटाने से शेष = $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 1 - (\frac{2+3+3}{12}) = 1 - \frac{8}{12} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ । अब इससे दृश्य गुणित इष्ट में भाग दिया तो भ्रमर की संख्या = $\frac{1 \times 1}{\frac{1}{3}} = \frac{1 \times 3}{1} = ३$ । अथवा १५ से कटने वाली किसी संख्या को इष्ट करना करने से अभिधरीति से उत्तर होगा ।

त्रिशक्तिकायाः उदाहरणम् ।

पद्भागः पाटलानु भ्रमरनिकरतः स्वत्रिभागः कन्द्वे
पादश्चूतद्रुमे च प्रदलितकुमुने चम्पके पञ्चमांशः ।

प्रास्तुल्लान्भोजखण्डे रविकरदलिते त्रिशदंशोऽभिरेने

तत्रैको नक्तमृत्तो भ्रमति नभसि चेत् का भवेद् मृत्तसंख्या ॥ १ ॥

भ्रमर समूह का $\frac{1}{2}$ पाटल पर, $\frac{1}{3}$ कन्द्वे पर, $\frac{1}{4}$ आम के पेड़ पर, $\frac{1}{5}$ चम्पा पुष्प पर और $\frac{1}{6}$ कमल पर चला गया । शेष १ भ्रमर आकाश में घूमना था तो, कुल भ्रमर की संख्या बताओ ।

उदाहरण—न्यास— $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ दृश्य = १ । यहाँ इष्ट १ मानकर उपरने उक्त भागों का योग बटाने से शेष भ्रमर = $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}) = 1 - (\frac{12+10+9+8+7}{60}) = 1 - \frac{46}{60} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$ । अब इससे इष्ट गुणित दृश्य में भाग दिया तो कुल भ्रमर की संख्या = $1 \times 1 \div \frac{7}{30} = \frac{1 \times 30}{7} = 4 \frac{2}{7}$ ।

अन्यः प्रश्नः ।

कामिन्या हारवत्याः सुरतकलहतो नीचिक्रानां श्रुटित्वा

भूर्ना जातत्रिभागः शयनवलगतः पञ्चमांशश्च दृष्टः ।

प्रातः पष्टः सुकरया गणक ! दशनकः संगृहीतः प्रियेण

दष्टं पष्टकं च सूत्रे कथय कविन्यैर्नीचिक्रैरेण हारः ॥ २ ॥

६ ली०

किसी स्त्री ने अपने पति के द्वारा दिये हुये नगियों के ३ को नस्तक में लगाया। शेष के ३ को स्तनों के बीच नाटा में लगाया। शेष के ३ को नगिवन्ध में और उस शेष के ३ को कटि प्रदेश में बाँधा, तब शेष १६ नगियों को बेगी में लगाया तो, नगियों की संख्या बचाओ।

उदाहरण—अश्र के अनुसार न्यास करने पर $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ हुये। इत्य = १६। अत्र 'द्विद् वाचनकेन' इस सूत्र के अनुसार लवोन हार वात क्रिया तो = $७ \times ४ \times १ \times १ = २८$ हुआ। हरी का वात = $८ \times ७ \times २ \times ४ = ४४८$ से २८ में भाग दिया तो $\frac{४४८}{२८}$ हुआ। इससे इत्य १६ में भाग देने पर नगियों की संख्या = $१६ \div \frac{४४८}{२८} = \frac{१६ \times २८}{४४८} = \frac{४५६}{४४८} = ४ \times ६४ = २५६$ । विलोम सूत्र से भी इसका उत्तर होता है।

अथ द्वीष्टकर्मसु कस्यचिन् पद्यम्—

आलापकोक्त्या निहृतां विभक्तवभोष्टराशी सहितो न युक्तौ
भागैः स्वहृत्स्याख्यविहीनिती तच्छेषौ ततोऽन्योन्यतद्विष्टनित्रौ ॥

भक्तं तयोरन्तरकं हि शेषान्तरेण शेषप्रमिती वनर्ण
त्रैतद्यतिः शेषयुतिप्रमक्ता राशिभवेद्द्वीष्टज कर्मणा वा ॥ १ ॥

द्वीष्ट कर्म में दो इष्ट राशियाँ होती हैं। दोनों इष्ट राशियों को आलाप के अनुसार गुणा, भाग, योग और अन्तर करें। इस तरह क्रिया करने पर दोनों इष्टों पर से दो शेष होंगे, तब पहले शेष को दूसरे इष्ट से तथा दूसरे शेष को प्रथम इष्ट से गुणा कर दोनों का अन्तर करें। इस अन्तर को शेषान्तर से भाग देने पर वास्तव राशि होगी।

यदि एक शेष धन तथा दूसरा ऋण हो, तो दोनों शेषों के योग से परन्तर इष्टों से गुणित शेषों के योग में भाग दें, तो राशि होती है।

उपपत्ति :—अत्रालापकोक्त्या इत्यम् = ६ = क. य + ग अत्र यदि य = ६, तदा ६' = क. ६ + ग।

∴ ६ ७ ६' = क. य + ग - क. ६ - ग = क. य ७ क. ६ = क (य ७ ६) = शी।

यदि य = ६', तदा ६'' = क. ६' + ग।

∴ ६ ७ ६'' = क. य + ग ७ क. ६' - ग = क. य ७ क. ६' = क (य ७ ६') = शी।

इष्टकर्म-परिशिष्ट

अभ्यासार्थं प्रश्नाः ।

- (१) किसी जमींदार ने अपने धन का $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ क्रम से अपनी ब्री, लड़का तथा लड़की को दिया तो उसके पास ४६५००० रु० बच गये तो बताओ उसके पास कुल कितने द्रव्य थे ।
- (२) एक चित्रकार ने किसी स्तम्भ के $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ को क्रम से लाल, पीले, हरे और काले रंग से चित्रित किया तो शेष १३ हाथ बच गया, तो स्तम्भ की लम्बाई बताओ ।
- (३) किसी ने अपने फूलों का $\frac{1}{2}$ शङ्कर को, शेष के $\frac{1}{3}$ लक्ष्मी को, फिर शेष के $\frac{1}{4}$ सरस्वती को, फिर शेष के $\frac{1}{5}$ गणेश को चढ़ाया, तो उसके पास ६० फूल बच गये, तो उसके पास कितने फूल थे ।
- (४) किसी गृहस्थ ने अपनी उपज का $\frac{1}{2}$ भोजन के लिये, शेष का $\frac{1}{3}$ बिक्री के लिये, फिर शेष का $\frac{1}{4}$ खेती के लिये, फिर शेष का $\frac{1}{5}$ विद्यार्थी के स्तुर्च में, बाकी का $\frac{1}{6}$ भित्ति के लिये, शेष का $\frac{1}{7}$ दीन के लिये, शेष का $\frac{1}{8}$ गुरु के लिये दिया, तो उसके पास ४०० मन बाकी रहा, तो कुल उपज बताओ ।
- (५) वह कौन सी संख्या है, जिसके $\frac{1}{2}$ में अपना $\frac{1}{3}$ वटाकर शेष में अपना $\frac{1}{4}$ वटाकर शेष में अपना $\frac{1}{5}$ वटाकर जो होता है उसमें अपना $\frac{1}{6}$ वटाकर शेष में अपना $\frac{1}{7}$ वटाने से पुनः शेष में अपना $\frac{1}{8}$ वटाकर शेष में फिर अपना $\frac{1}{9}$ वटाते हैं, तो शेष २० रहता है ।

द्विष्टकर्म-परिशिष्ट

अभ्यासार्थं प्रश्नाः ।

- (१) एक व्यक्ति के पास २० मन चावल और ५०० रु० हैं, दूसरे के पास ८० मन चावल और १०० रु० ऋण हैं लेकिन दोनों की सम्पत्तियाँ समान हैं—अतः चावल का मूल्य बताओ ।
- (२) एक व्यक्ति को २५ बैल, १० गाय और ५० रु० = हैं, दूसरे को २० गाय, ५० बैल और १२५ रु० ऋण के, तो पशुओं का मूल्य बताओ ।

राशियों का योग १०१ है और अन्तर २५ है, उन दोनों राशियों को बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । योगः १०१ । अन्तरम् २५ । जातौ राशी ३८।३३ ।

उदाहरण—योग = १०१ । अन्तर = २५ । अब सूत्र के अनुसार
 $\frac{१०१+२५}{२} = \frac{१२६}{२} = ६३ =$ द्वितीय संख्या । एवं $\frac{१०१-२५}{२} = ३८ =$

∴ दोनों संख्यायें ३८ और ६३ । वा—एक संख्या निकालकर योगाङ्क में बचाने से दूसरी संख्या होगी ।

अन्यत्करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

वर्गान्तरं राशिद्वियोगभक्तं योगस्ततः प्रोक्तवदेव राशी ॥ १ ॥

वर्गान्तरं राशिद्वियोगभक्तं योगः स्यात्, ततः प्रोक्तवदेव (संक्रमण विधानेन) राशी स्याताम् ।

राशि वर्गान्तर और राश्यन्तर के ज्ञान से राशि ज्ञान के लिए यह प्रकार है । वर्गान्तर में राश्यन्तर से भाग देने पर दोनों राशियों का योग होता है । अन्तर ज्ञात ही है । अतः संक्रमण की रीति से राशियों का ज्ञान करना चाहिये ।

उपपत्तिः—वर्गान्तरं = व. अ = अ^२ - क^२ । राश्यन्तरं = रा. अ = अ - क ।

$$\therefore \frac{\text{व.अ.}}{\text{रा.अ}} = \frac{\text{अ}^2 - \text{क}^2}{\text{अ} - \text{क}} = \frac{(\text{अ} + \text{क})(\text{अ} - \text{क})}{\text{अ} - \text{क}} = \text{अ} + \text{क} = \text{योगः ।}$$

ततः संक्रमणेन राशी सुखेन ज्ञायते । इति ।

उद्देशकः ।

राशयोर्वयोर्वियोगोऽष्टौ तत्कृत्योश्च चतुःशती ।

त्रिवरं वद वी राशी शीघ्रं गणितकोविद् ! ॥ १ ॥

हे गणित कोविद् ! त्रिन दो राशियों का अन्तर ८ है और वर्गान्तर ४०० है, उन दोनों राशियों को बताओ ।

न्यासः । राश्यन्तरम् = ८ । कृत्यन्तरम् ४०० । जातौ राशी २१ । २६ ।

उदाहरण—राश्यन्तर = ८ । वर्गान्तर = ४०० । अब सूत्र के अनुसार
 $४०० \div ८ = ५० =$ योग । तब संक्रमण से राशि = $\frac{४००+८}{२} = \frac{४०८}{२} = २०४ =$
 द्वितीय संख्या । $५० - २१ = २९ =$ बड़ी संख्या ।

इति संक्रमणम् ।

$$\therefore 2r^2 + r \cdot z = \frac{v \cdot z - z^2}{2z} = \frac{v \cdot z}{2z} - \frac{z^2}{2z}$$

$$= 2r^2 + 2r \cdot z = 2 \left(\frac{v \cdot z}{2z} - \frac{z^2}{2z} \right)$$

$$= 2r^2 + 2r \cdot z + z^2 = \frac{v \cdot z}{z} - \frac{z^2}{z} + z^2$$

$$= 2r + z = \sqrt{\frac{v \cdot z}{z} - \frac{z^2}{z} + z^2}$$

अत्र $2r + z =$ योगः ततः संक्रमणेन राशी भवतः ।

उदाहरण—वर्गान्तर = ३७, राश्यन्तर = १ । अब सूत्र के अनुसार $\frac{37^2}{4} = 338 \frac{1}{4}$ । $338 - 1 = 337 =$ शेष । $\therefore \frac{337 \times 4}{4} = 337$ ।

$\therefore 337 + 1^2 = 338$ । $\sqrt{338} = 18 =$ योग । \therefore संक्रमण द्वारा बढ़ी राशि = $\frac{337}{4} = 84 \frac{1}{4}$ । छोटी राशि = $18 - 1 = 17$ ।

यनयोग और राशियोग के ज्ञान से राशिज्ञान ।

यनैक्यं राशियोगात्प्रं योगार्थकृतिवर्जितम् ।

त्रिभक्तं तत्पदेनोनं योगार्थं संयुतं च तौ ॥ १ ॥

यन योग को राशि योग से भाग देकर लब्धि में योगार्थ के वर्ग को घटा कर शेष को ३ से भाग देकर लब्धि का मूल अन्तरार्थ होता है । बाद योगार्थ में अन्तरार्थ को जोड़ने और घटाने पर राशियाँ होती हैं ।

जैसे—यन योग = ७२, राशि योग = ६ । अब $72 \div 6 = 12$ । $12 - \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 12 - 4 = 8$ । $\frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$ । $\sqrt{8} = 2 \frac{2}{3} =$ अन्तरार्थ । \therefore योगार्थ + अन्तरार्थ = $\frac{8}{3} + 2 = 2 + 2 = 4 =$ बढ़ी राशि । योगार्थ - अन्तरार्थ = $\frac{8}{3} - 2 = 2 =$ छोटी राशि ।

अन्यासायं प्रश्नाः ।

- (१) राशि योग ११५० है और अन्तर १०० है, तो राशियाँ बताओ ।
- (२) राशि योग ४० है और अन्तर १० है तो दोनों राशि बताओ ।
- (३) वर्गान्तर २२ है और राश्यन्तर १ है, तो दोनों राशि बताओ ।
- (४) वर्गान्तर ६९ है और राश्यन्तर ३ है, तो दोनों राशि बताओ ।

इष्टम् ३ । वर्गवर्गः ३३ । अष्टमः ३ । सैको जातः प्रथमो राशिः ३ ।
पुनरिष्टम् ३ अस्य घनः ३ । अष्टगुणो जातो द्वितीयो राशिः ३ ।
एवं जातौ राशी ३ ३ ।

अथैकेष्टेन ६ । २ । द्विकेन १२६ । ६४ । त्रिकेण ६४६ । २१६ ।

एवं सर्वेष्वपि प्रकारेष्विष्टवशादानन्त्यम् ।

उदाहरण—इसका गणित मूल में सप्त है अतः नहीं लिखा गया ।

पाटीसूत्रोपमं वीजं गूढमित्यवभासते ।

नास्ति गूढमगूढानां नैव पोटैत्यनेकथा ॥ १ ॥

अस्ति त्रैराशिकं पाटी, वीजं च विमला मतिः ।

किमज्ञातं सुबुद्धीनामतो मन्दार्थमुच्यते ॥ २ ॥

पाटी गणित के मुख्य जो वीजगणित वह कटिन जान पड़ता है, किन्तु बुद्धिमानों के लिए कटिन नहीं है । यह है प्रकार का ही नहीं है, बल्कि अनेक प्रकार का है ॥ १ ॥ त्रैराशिक ही पाटी गणित है और निर्मल बुद्धि ही वीज गणित है, अतः बुद्धिमानों के लिए कुछ भी अज्ञात नहीं है, फिर भी मैं मन्द बुद्धियों के लिये कहता हूँ ॥ २ ॥

इति वर्गकर्म ।

अथ गुणकर्म ।

गुणान्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य युक्तस्य गुणार्धकृत्या ।

मूलं गुणार्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं प्रष्टुरभीष्टराशिः ॥ ५ ॥

यदा लवैश्चोनयुतः स राशिरेकेन भागोनयुतेन भक्त्या ।

दृश्यं तथा मूलगुणं च ताम्यां साध्यस्ततः प्रोक्तवदेव राशिः ॥ ६ ॥

गुणान्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य गुणार्धकृत्या युक्तस्य मूलं गुणार्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं तदा प्रष्टुः अभीष्टराशिः स्यात् । यदा स राशिः लवैः इनयुतः तदा भागोनयुतेन एकेन दृश्यं तथा मूलगुणं च भक्त्या ततः ताम्यां प्रोक्तवदः एव राशिः साध्यः ॥ २ ॥

$$\therefore \frac{2 \times 2 \times 2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5 = \frac{3}{2} \quad \therefore \sqrt{\frac{9 \times 3}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{गुणार्ध } \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{8} = 1 \quad (1)^2 = 1 \text{ हंसों की संख्या}$$

आई ॥ ३ ॥

अथ भागनूलोने दृष्टे उदाहरणम् ।

पार्थः कर्णवचाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे संदधे

तस्यार्धेन निवार्य तच्छरणां नूलैश्चतुर्भिर्हयान् ।

शस्त्रं पट्टभिरयेषुभित्तिभिरपि च्छत्रं ध्वजं क्रामुकं

चिच्छेदास्य शिरःशरेण कति ते यानर्जुनःसंदधे ॥ ४ ॥

अर्जुन ने युद्ध में क्रुद्ध होकर कर्ण को मारने के लिये कुछ बाणों को लेकर, उनके आघे से कर्ण के बाणों को रोकना, और सभी बाणों के चतुर्गुणित मूल से बंदों को मारकर ६ बाणों से शरय को, ३ से कर्ण के छत्र, ध्वजा और घनुप को तथा १ बाण से उसका शिर काट डाला, तो बताओ उसने कितने बाणों को धारण किया था ॥ ४ ॥

न्यासः । भागः ३ । मूलगुणकः ४ । दृश्यम् १० । यदा लवैश्चोनयुत इत्यादिना जातं बाणमानम् १०० ।

उदाहरण—मूलगुणक = ४ । भाग = ३ । दृश्य = १० । अथ पहले की तरह— $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \therefore 10 \div \frac{2}{3} = 20 =$ नवीन दृश्य । $4 \div \frac{2}{3} = 6 =$ नवीन मूल गुणक । गुणार्ध = $\frac{4}{2} = 2 \therefore (2)^2 = 4$ । $4 + 20 = 24$ । $\sqrt{24} = 6 \therefore 6 + 4 = 10$ । $(10)^2 = 100$ । अतः बाणों की संख्या = १०० ।

अपि च ।

अलिकुलदलमूलं मालतीं यातनश्रीं

निखिलनवमभागाश्चालिनी भृङ्गनेकम् ।

निशि परिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं

प्रति रणति रणन्तं ब्रूहि कान्तेऽलिसंख्याम् ॥ ५ ॥

हे कान्ते ! अनर-समूह का $\frac{1}{3}$ भाग तथा उस समूह के आघे $\frac{1}{3}$ के मूल-वृत्त मालती फूल पर गये, और सुगन्धि के लोच से रात में कमल-कोश में

$$\therefore \frac{2 \times 20}{2} + \frac{20}{2} = 20 = \frac{20 \times 20}{20} = \frac{20 \times 20}{20} \quad \therefore \sqrt{\frac{20 \times 20}{20}} = \frac{20}{20}$$

$$\therefore \text{गुणार्ध} \frac{20}{20} + \frac{20}{20} = \frac{20}{20} = 12 \quad (12)^2 = 144 \text{ हंसों की संख्या}$$

आई ॥ ३ ॥

अथ भागनूलोने दृष्टे उदाहरणम् ।

पार्यः कर्णववाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे संद्वेषे

तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ।

शक्त्यं षड्भिरयेषुभिस्त्रिभिरपि च्छत्रं ध्वजं क्रामुकं

चिच्छेदास्य शिरःशरेण क्वचित्ते वानजुनःसंद्वेषे ॥ ४ ॥

अर्जुन ने युद्ध में क्रुद्ध होकर कर्ण को मारने के लिये कुछ बाणों को लेकर, उनके आवे से कर्ण के बाणों को रोका, और सभी बाणों के चतुर्गुणित मूल से बाणों को मारकर ६ बाणों से शक्य को, ३ से कर्ण के छत्र, ध्वजा और धनुष को तथा १ बाण से उसका शिर काट डाला, तो वताओ उसने कितने बाणों को धारण किया था ॥ ४ ॥

न्यासः । भागः ३ । मूलगुणकः ४ । दृश्यम् १० । यदा लवैश्चोनयुत इत्यादिना जातं बाणमानम् १०० ।

उदाहरण—मूलगुणक = ४ । भाग = ३ । दृश्य = १० । अब पहले की तरह— $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \therefore 10 \div \frac{2}{3} = 20 =$ नवीन दृश्य । $2 \div \frac{2}{3} = 6 =$ नवीन मूल गुणक । गुणार्ध = $\frac{2}{3} = 2 \therefore (2)^2 = 4$ । $4 + 20 = 24$ । $\sqrt{24} = 6 \therefore 6 + 2 = 10$ । $(10)^2 = 100$ । अतः बाणों की संख्या = १०० ।

अपि च ।

अलिकुलदलमूलं मालतीं चातमश्रीं

निखिलनवनभागाश्चालिनीं शृङ्गनेकम् ।

निशि परिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं

प्रति रपाति रणन्तं ब्रूहि कान्तेऽलिसंख्याम् ॥ ५ ॥

हे कान्ते ! अनर-समूह का $\frac{1}{3}$ भाग तथा उस समूह के आवे $\frac{1}{3}$ के मूल-रूप मालती फूल पर गये, और सुगन्धि के लोन से रात में कमल-कोश में

७ ली०

$1200 \div \frac{1}{3} = \frac{1200 \times 3}{1} = 3600 = 300 \times 12 = 300 =$ नवीन दरय । मूल गुणक

$10 \div \frac{1}{3} = \frac{10 \times 3}{1} = 30 = 3 \times 10 = 30 =$ न० मूलगुणक । गुणार्थं = $\frac{30}{3}$ है ।

$\therefore (\frac{30}{3})^2 + 300 = \frac{900}{9} + 300 = \frac{900 + 2700}{9} = \frac{3600}{9} = 400$ ।

$\sqrt{\frac{3600}{9}} = \frac{60}{3} = 20$ । इसमें गुणार्थ घटाने से $\frac{60}{3} - \frac{30}{3} = \frac{30}{3} = 10$ ।

$\therefore (10)^2 = 100 =$ राशि ।

अभ्यासाय प्रश्नाः ।

- (१) वह संख्या बताओ, जिसमें अपने वर्ग मूल का २१ गुणा जोड़ देने से १६९६ हो जाता है ।
- (२) वह कौन सी संख्या है, जिसमें उस संख्याके मूल का १२ गुणा घटाने से ५२० होता है ।
- (३) वह संख्या बताओ जिसमें अपने $\frac{1}{3}$ के मूल का ३० गुणा और अपना $\frac{1}{3}$ घटाने से ७८३ होता है ।
- (४) जिसमें अपने ८ गुणा का मूल और अपना $\frac{1}{2}$ भाग घटाने से १२० होता है, वह संख्या बताओ ।
- (५) वह संख्या बताओ जिसमें अपने दूनेके मूल का (३) गुणा और अपना $\frac{1}{3}$ जोड़ने से ६७१ होता है ।
- (६) किसी आदमी ने अपने धन के वर्ग मूल का १५ गुणा अपने पुत्र को तथा धन का $\frac{1}{3}$ लड़की को दिया, तो उसके पास ८१ ह० बच गये, तब कुल रुपये कितने थे ।
- (७) वह कौन सी संख्या है, जिसमें अपने $\frac{1}{2}$ का मूल और अपने $\frac{1}{3}$ भाग को घटाने से २८९२ होता है ।
- (८) वह संख्या बताओ, जिसमें अपने मूल का ११ गुणा और अपना $\frac{1}{3}$ जोड़ने से १९५० होता है ।
- (९) वह संख्या बताओ, जिसमें अपने मूल का ८ गुणा और अपना $\frac{1}{2}$ घटा देने से ८८० होता है ।

इति गुणकर्म ।

अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

कुङ्कुमस्य सदलं पलद्वयं निष्कसप्तमलवैखिभिर्यदि ।

प्राप्यते सपदि मे वणिग्वर ! त्रुहि निष्कनवक्रेन तत् कियत् ? ॥ १ ॥

हे वणिग्वर ! यदि ($\frac{3}{4}$) निष्क मे ($\frac{1}{2}$) पल कुङ्कुम मिलता है, तो ९

निष्क मे कितना कुङ्कुम मिलेगा, यह शोधन बताओ ।

न्यासः । $\frac{3}{4}$ । $\frac{1}{2}$ उच्चविविना लब्धानि कुङ्कुमपलानि १२ । कर्षो २ ।

उदाहरण—प्रमाण $\frac{3}{4}$ । प्र.फ = $\frac{1}{2}$ । इच्छा ९० । अत्र सूत्र के अनुसार—

$$\frac{\text{प्र.फ} \times ३०}{\text{प्र०}} = \frac{\frac{1}{2} \times ९०}{\frac{3}{4}} = \frac{१५}{\frac{3}{4}} = \frac{१५ \times ४}{३} = \frac{६०}{३} = २० = ५२ + \frac{१}{२} = \text{पल।}$$

अब १ को ४ से गुणा करने पर कर्ष हुआ । इसे २ से भाग दिया तो $\frac{१ \times ४}{२} =$

२ कर्ष \therefore उत्तर = ५२ पल २ कर्ष ।

अन्यः प्रश्नः—

प्रकृष्टकर्पूरपलत्रिपष्टथा चेल्लभ्यते निष्कचतुष्कयुक्तम् ।

शतं तदा द्वादशभिः सपादैः पलैः किमाचक्ष्व सखे ! विचिन्त्य ॥ २ ॥

हे मित्र ! यदि उत्तम कर्पूर के ६३ पल में १०४ निष्क मिलते हैं, तो

$१२ + \frac{१}{२}$ पल में कितने निष्क मिलेंगे ।

न्यासः । $\frac{६३}{१०४}$ । $\frac{१०४}{१२}$ । $\frac{१}{२}$ । मध्यमिच्छागुणितं $\frac{५२ \times ६३}{१०४}$ छेदमक्तम्

१२५२ आद्येन ६३ हृतं लब्धा निष्काः २० । शेषं १४ षोडशगुणितम् २२४

आद्येन भक्तंजाता द्रम्भाः ३ । पणाः २ । काक्यः ३ । वराटकाः ११ $\frac{१}{२}$ ।

उदाहरण—इसका गगिन मूल में स्पष्ट है ।

अन्यदुदाहरणम् ।

द्रम्मद्वयेन साशंशा शालितप्पुल्लकारिका ।

लभ्या चेन् पणसप्तत्या तत् किं सपदि कथ्यताम् ? ॥ ३ ॥

यदि २ द्रम्म में धान के चावल की $\frac{1}{2}$ खारी मिलती है, तो ७० पण में

कितनी खारियाँ मिलेंगी, यह शोधन बताओ ।

अत्र प्रमाणसजातीयकरणाय द्रम्मद्वयस्य पणीकृतस्य

न्यासः । $\frac{१}{२}$ । $\frac{७०}{१००}$ लब्धे खार्यो २ । द्रोणाः ७ । आडकः १ । प्रस्थो २ ।

उदाहरण—२० = २ द्रम्म = ३२ पण । प्र.फ = $\frac{१}{२}$ । इ. = ७० । अत्र सूत्र

उदाहरण—प्रमाण ३६ । प्रमाण फल ३२ । इच्छा २० । प्रश्न में प्राणियों का मूल्य लाना है अतः व्यस्त त्रैराशिक होने के कारण प्रमाण को प्रमाण फल से गुणा कर इच्छा से भाग देने पर इच्छा फल होगा । अब उक्त रीति से $\frac{36 \times 20}{32} = \frac{720}{32} = 22\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$ उत्तर । दूसरे प्रश्न में प्र. २, प्र. फ. ४ और इच्छा ६ है अतः इच्छा फल = $\frac{2 \times 6}{4} = \frac{12}{4} = 3$ निष्क ।

अन्यः प्रश्नः ।

दशवर्णं सुवर्णं चेत् गद्याणकमवाप्यते ।

निष्केण त्रिधिवर्णं तु तदा वद क्रियन्मितम् ॥ २ ॥

यदि ३ निष्क में १० रुपये बरी बिकने वाला सोना ३ गद्याणक निष्ठवा है, तो १५ रुपये बरी वाला सोना कितना मिलेगा ॥ २ ॥

न्यासः १० । १ । १५ लब्धम् $\frac{3}{2}$ ।

उदाहरण—प्र. १०, प्र. फ. ३ और इच्छा १५ है, अतः व्यस्त त्रैराशिक विधि से $\frac{10 \times 15}{3} = 50 = 50$ इच्छा फल ।

राशिभागहरणे उदाहरणम् ।

सप्ताङ्केन मानेन राशौ सस्यस्य मापिते ।

यदि मानशतं जातं तदा पञ्चाङ्केन चिम् ॥ ३ ॥

यदि अन्न की राशि को ७ आदक के मान से मापने पर १०० मान होते हैं, तो उसे ५ आदक के मान से मापने पर कितने होंगे । नेपाल में मान शब्द माना नाम से प्रसिद्ध है । वहाँ अभी भी माना की तौल प्रचलित है ॥ ३ ॥

न्यासः । ७ । १०० । ५ लब्धम् १४० ।

उदाहरण—प्र. ७, प्र. फ. १०० और इच्छा ५ है अतः व्यस्त त्रैराशिक से इच्छा फल = $\frac{7 \times 100}{5} = 140 = 140$ माना ।

इति व्यस्तत्रैराशिकम् ।

पारशिष्ट ।

- (१) पृष्ठ ही जाति की दो संख्याओं के बीच जो सम्बन्ध होता है उसे उन राशियों का अनुपात या निष्पत्ति कहते हैं । सजातीय दो संख्याओं की परस्पर तुलना करने पर सम्बन्ध का पता लगता है, जैसे ५ ६० और १५ ६० में तुलना करने पर ५ से १५ तीन गुना है, अतः ५ ६०

यया—३, ४, १५, २० यहाँ ३ और २० अन्य राशियाँ तथा ४ और १५
नव्य राशियाँ हैं ।

समानुपात में अन्य राशियों का गुणनफल नव्य राशियों के गुणनफल के
बराबर होता है, यया ऊपर के उदाहरण में अन्य राशियों का
गुणनफल $३ \times २० = ६०$, तथा नव्य राशियों का गुणनफल
 $= ४ \times १५ = ६०$, दोनों बराबर हैं ।

(५) यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो
पहली : दूसरी :: तीसरी : चौथी
दूसरी : पहली :: चौथी : तीसरी
चौथी : तीसरी :: दूसरी : पहली

यदि चारों राशियाँ समांतर हों तो
पहली : तीसरी :: दूसरी : चौथी ।

(६) यदि तीन राशियाँ ऐसी हों जिनमें पहली और दूसरी का निष्पत्ति,
दूसरी और तीसरी का निष्पत्ति के समान हो, तो उन्हें संलग्न समानु-
पाती कहते हैं । दूसरी राशि को पहली और तीसरी को नव्य समानु-
पाती तथा तीसरी को पहली और दूसरी को तृतीय समानुपाती
कहते हैं ।

अभ्यासार्थ प्रश्नाः ।

निम्नलिखित अनुपातों का सूचन रूप बताओ ।

(१) १५ : १८ । ३३ : १२१ । २ ६० ८ आ० : १० आ० । १ मन :
५ सेर । ६ पे० : २ दि० । २ पज : १ निष्क ।

निम्नलिखित अनुपातों का संलग्न समानुपात बताओ ।

(२) २ : ३ और ६ : ७ । ११ : १३ और २६ : ३३ । ४१ : ८३ और
२४२ : ३२८ ।

इनका नव्य समानुपाती बताओ ।

(३) २ और ८ । ३ और २७ । ८ और ३२ । ४ और १२१ ।

इनकी तीसरी समानुपाती बताओ ।

(४) २३ और $\frac{१५}{८}$ । २१ और $\frac{३५}{८}$ । १ वी० और १५ दि० ।

इनकी चौथी समानुपाती राशि बताओ ।

पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि नै फल और हर को पास्वर स्थान परिवर्तन कर, अधिक राशियों के वात नै अल्प राशियों के वात से भाग देने पर फल होता है ।

उपपत्ति:—पञ्चानां राशीनां ज्ञाने पटस्य ज्ञानं येन विधिना भवति तस्यपञ्चराशिकमेवं सप्तराशिकादावपि बोध्यम् ।

अत्र कल्प्यते—प्र.का. इ.का.

प्र.घ. इ.घ.

प्र.फ.

अत्रानुपातेनेष्टफलम् = $\frac{\text{प्र.फ.} \times \text{इ.का.}}{\text{प्र.का.}}$ ततोऽन्योऽनुपातः यदि प्रमाणघने-

नेष्टं फलं तदेष्टघनेन क्षिनिति जातनिष्टफलम् = $\frac{\text{प्र.फ.इ.का.इ.घ.}}{\text{प्र.का.प्र.घ.}}$ अत उपपन्नम् ।

अत्र स्वरूपदर्शनेन स्फुटं ज्ञायते यत्रैराशिकद्वयेन पञ्चराशिकमुपपद्यते । सप्तराशिकादीनामुपरत्तिस्तु ध्यादित्रैराशिकवशेन भवतीति धीरैरवगन्तव्यम् ।

उदाहरणम् ।

मासे शतस्य यदि पञ्च कलान्तरं स्याद्

वर्षे गते भवति किं वद पोडशानाम् ? ।

कालं तथा कथय मूलकलान्तराभ्यां

मूलं घनं गणक ! कालफले विदित्वा ॥ १ ॥

यदि १ महीने में १०० का ५ सूद हाता है, तो १२ महीने में १६ का

सूद क्या होगा ।

न्यासः । १०० | १०० | अन्योन्यपक्षनयने न्यासः । १०० | १०० ।

बहूनां राशीनां वधः ६६० । अल्प राशिवधेन १०० अनेन भक्ते लब्धम् ६ । शेषम् $\frac{६६०}{६}$ विंशत्याऽपवर्त्य ६ जातं कलान्तरम् ६६ । छेद-प्ररूपे कृते जातम् $\frac{६६}{६}$ ।

अथ कालज्ञानार्थं न्यासः । १०० | १०० |

अन्योन्यपक्षनयने न्यासः । १०० | १०० |

यदि १३ महीने में १०० का ५३ मुद्र होता है, तो ३६ महीने में ६२३ का मुद्र क्या होगा, यह कहां ॥ २ ॥

न्यासः $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 100 \\ 53 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 36 \\ 100 \\ 623 \end{array} \right\}$ छेदत्ररूपेणिवति कृते न्यासः $\left\{ \begin{array}{l} 36 \\ 100 \\ 623 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 100 \\ 53 \end{array} \right\}$

अन्योन्यपक्षनयने न्यासः $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 100 \\ 53 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 36 \\ 100 \\ 623 \end{array} \right\}$

तत्र बहुराशिवः १५६००० स्वल्पराशिवः २०००० ।
छेदमक्ते लब्धम् ७३ । छेदत्ररूपे कृते जातं कलान्तरम् ३६ ।
कालादिज्ञानाय पूर्ववन् ।

यद्वा प्रचरान्तरेणास्योदाहरणम् ।

न्यासः १३ । १०० । ५३ । ३६ । ६२३ ।

अत्र सर्वेषां छेदत्ररूपेषु लब्धा यनर्गमित्यादिना स्वर्णने कृते जातम् ३६ । १०० । ३६ । ३६ । १३५ ।

अन्योन्यपक्षनयनेन बहुनां राशीनां ३६ । १३५ । १३६ । वयः ५३०००
अल्पराशयोः ३६ । १३६ वयः ५३०

भागार्थं विपर्ययेण न्यासः ५३००० । १३६ । अंशाहतिः १५६००० ।
छेदवचेन २०००० भक्त्वा जातम् ७३ । छेदत्ररूपे कृते जातं कलान्तर-
मिदम् ३६ । एवं सर्वत्र ज्ञेयम् ।

उदाहरण—इसका गणित मूल में ही स्पष्ट है ।

अथ सप्तराशिकोदाहरणम् ।

विस्तारे त्रिकराः कराष्टकमिता दैर्घ्यं विचित्राश्च चे-

द्रूपैरुत्कटपट्टसूत्रपटिका अष्टौ लभन्ते शतम् ।

दैर्घ्यं सार्धंकरत्रयाऽपरपटो हस्तार्थविस्तारिणी

गाढक् किं लभते ? द्रुतं षट् वणिक् ! वाणिज्यकं वेत्ति चेत् ॥

हं वणिक् ! यदि तुम व्यापार जानते हो, तो मुन्दर रेखन की विचित्र रूपवादी ३ हाथ चौड़ी और ८ हाथ लंबी ८ दुपट्टियाँ (चादरें) १०० तिक्क

(१) यदि १ गाय की कीमत १५ रु० है, तो ५ गाय की कीमत निकालना है, तो यहाँ गुणा के द्वारा क्रिया होगी ।

लिखने की विधि यह है— ∴ १ गाय का मूल्य १५ रु० है ।

$$\therefore ५ \text{ गाय का मूल्य } १५ \times ५ = ७५ \text{ रु० ।}$$

$$\text{उत्तर} = ७५ \text{ रु० ।}$$

(२) यदि २० मन चावल का मूल्य २१ पौण्ड है, तो ४ मन चावल का मूल्य बताओ । उत्तर—

$$\therefore २० \text{ मन चावल का मूल्य } २१ \text{ पौण्ड है ।}$$

$$\therefore १ \text{ मन चावल का मूल्य } \frac{२१}{२०} \text{ पौण्ड होगा ।}$$

$$\therefore ४ \text{ मन चावल का मूल्य } \frac{२१ \times ४}{२०} \text{ होगा ।}$$

$$\therefore \frac{२१ \times ४}{२०} = \frac{२१}{५} = ४ \text{ पौण्ड । शेष } १ \times २० = २० \text{ शि० ।}$$

$$\therefore \frac{२१}{५} = ४ \text{ शि० ।}$$

$$\therefore \text{उत्तर} = ४ \text{ पौ० } ४ \text{ शि० ।}$$

यहाँ पहले भाग तब गुणा के द्वारा क्रिया की गयी है ।

(३) यदि १ मनुष्य १ काम का १५ दिन में कर सकता है, तो उसी काम को ३ मनुष्य कितने दिन में कर सकते हैं ?

$$\therefore १ \text{ मनुष्य } १ \text{ काम को } १५ \text{ दिन में करता है ।}$$

$$\therefore ३ \text{ मनुष्य उसी काम को } \frac{१५}{३} = ५ \text{ दिन में कर सकते हैं ।}$$

(४) यदि १२ मनुष्य १ काम को ५ दिन में पूरा करें, तो १ मनुष्य कितने दिन में करेगा ?

$$\therefore १२ \text{ मनुष्य } १ \text{ काम को } ५ \text{ दिन में पूरा करते हैं ।}$$

$$\therefore १ \text{ मनुष्य उसी काम को } १२ \times ५ = ६० \text{ दिन में करेंगे ।}$$

(५) यदि ३ मन चावल ९ आदमियों के लिये ३० दिन के हों, तो १ आदमी के लिए वह कितने दिनों के होंगे ?

$$\therefore ३ \text{ मन चावल } ९ \text{ आदमियों के लिए } ३० \text{ दिन के हैं ।}$$

$$\therefore ३ \text{ मन चावल } १ \text{ आदमी के लिए } ९ \times ३० = २७० \text{ दिन के हैं ।}$$

(६) यदि ६ गज कपड़ा ८ रु० ४ आ० का हो, तो २५ गज कितने का होगा ?

$$\therefore ६ \text{ गज का मोल } = ८ \text{ रु० } ४ \text{ आ० ।}$$

$$\therefore १ \text{ गज का मोल } = ८ \text{ रु० } ४ \text{ आ० } \frac{१}{६} ।$$

$$\therefore २५ \text{ गज का मोल } = ८ \text{ रु० } ४ \text{ आ० } \times \frac{२५}{६} = ३४ \text{ रु० } ६ \text{ आ०, उत्तर ।}$$

∴ १२०० मनुष्यों के लिये— $\frac{5 \times 3 \times 3000}{4 \times 3} = 375 + \frac{3}{4}$ ।

(१३) यदि ८ बैल या ६ घोड़े एक खेत की घास को १० दिन में खा लें, तो ५ बैल और ४ घोड़े उसी खेत की घास को कितने दिनों में खा लेंगे ।

∴ ८ बैल उतनी ही घास खाते हैं जितनी ६ घोड़े ।

∴ १ " " " खाते हैं " $\frac{8}{3}$ घोड़े ।

∴ ५ " " " खाते हैं " $\frac{5 \times 8}{6} = \frac{20}{3}$ घोड़े ।

∴ ५ बैल और ४ घोड़े उतनी ही घास खाते हैं जितनी $(\frac{20}{3} + 4)$ घोड़े = $\frac{32}{3}$ ।

अथ ∴ ६ घोड़े उस घास को १० दिन में खाते हैं ∴ १ घोड़ा उस घास को $10 \times 6 = 60$ दिन में खावेगा ।

∴ $\frac{32}{3}$ घोड़े उस घास को $\frac{60 \times 32}{3} = 640$ दिन में खावेंगे ।

(१४) यदि राम एक काम को ७ दिन में करता है और मोहन ९ दिन में, तो दोनों मिलकर उस काम को कितने दिन में करेंगे ?

∴ राम १ काम को ७ दिन में करता है ∴ उस काम का $\frac{1}{7}$ १ दिन में करेगा । मोहन उसी काम को ९ दिन में करता है ∴ उस काम का $\frac{1}{9}$ १ दिन में करेगा ।

∴ राम और मोहन उस काम के $(\frac{1}{7} + \frac{1}{9})$ को १ दिन में कर सकते हैं । परन्तु $\frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{16}{63}$, ∴ कुल काम को वे दोनों $\frac{63}{16}$ दिन में कर सकते हैं ।

(१५) राम १ काम को १० घण्टे में और श्याम उसी काम को ८ घण्टे में करता है, तो दोनों मिलकर कितने घण्टे में कर सकते हैं ?

∴ राम १ काम को १० घण्टे में करता है ∴ १ घण्टा में उसी काम का $\frac{1}{10}$ करेगा । श्याम भी उसी काम का $\frac{1}{8}$, १ घण्टा में करेगा ।

∴ दोनों उस काम के $(\frac{1}{10} + \frac{1}{8})$ को १ घण्टा में करेंगे ।

∴ कुल काम को वे लोग $\frac{80}{18} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ घण्टे में करेंगे ।

(१६) यदि १ काम को क ४ दिन में, ख ५ दिन में और ग ६ दिन में कर लेता है, तो वे कुल मिलकर उस काम को कितने दिनों में कर सकते हैं ?

यहाँ १०० द० में २३ कर्मादान है अतः ३५० द० का कर्मादान =

$$\frac{३५० \times ५}{१००} = \frac{३५० \times ५}{१०० \times २} = \frac{३५० \times १}{२० \times २} = \frac{३५}{२०} = १८ द० १२ आ०$$

इसी तरह अन्य प्रश्नों का भी उत्तर बनाना चाहिए ।

अथ मिश्रकव्यवहारे करणसूत्रं साधयित्तम् ।

प्रमाणकालेन हतं प्रमाणं विमिश्रकालेन हतं फलं च ॥ १० ॥

स्वयोगभक्ते च पृथक् स्थिते ते मिश्राहते मूलकलान्तरे स्तः ।

यद्वेष्टकर्माख्यविधेस्तु मूलं मिश्राच्च्युतं तत्र कलान्तरं स्यात् ॥ ११ ॥

प्रमाणं (प्रमाणधनं) प्रमाणकालेन हतं, फलं च विमिश्रकालेन हतं ते पृथक्स्थिते मिश्राहते स्वयोगभक्ते मूलकलान्तरे स्तः । वा इष्टकर्माख्यविधेः यत् मूलं तत् मिश्राच्च्युतं तदा कलान्तरं स्यात् ।

प्रमाण-धन को प्रमाण-काल से तथा प्रमाण-फल को मिश्रकाल से गुणाकर दोनों को अलग-अलग रखें । बाद में दोनों को मिश्रधन से गुणाकर अपने योग से भाग दें, तो क्रम से मूलधन और सूद होते हैं । अथवा— इष्टकर्म की क्रिया से जो मूलधन हो उसे मिश्रधन में घटा देने से सूद होता है ।

उपपत्तिः—अथ त्रैरानिदेन मिश्रकाले प्रमाणधनमन्वयोपकलान्तरम्

$$= \frac{प्र० फ० \times नि० का०}{प्र० का०}, \quad \therefore प्र० ध० + \frac{प्र० फ० \times नि० का०}{प्र० का०}$$

$$= \frac{प्र० ध० \times प्र० का० + प्र० फ० \times नि० का०}{प्र० का०} = सकलान्तरधनम् ।$$

$$\text{पुनरनुपातेनेष्टमूलधनम्} = \frac{प्र० ध० \times नि० ध०}{\frac{प्र० ध० \times प्र० का० + प्र० फ० \times नि० का०}{प्र० का०}}$$

$$= \frac{प्र० ध० \times नि० ध० \times प्र० का०}{प्र० ध० \times प्र० का० + प्र० फ० \times नि० का०} ।$$

$$\text{पुनरनुपातः} = \text{यजानीत्र-सकलान्तर-धनेनेदं} = \frac{प्र० फ० \times नि० का०}{प्र० का०} \text{ कलान्तरं}$$

देने पर क्रम से मूटघन = $\frac{1000 \times 1000}{4 \times 10} = 25 \times 25 = 625$ । तथा सूद = $\frac{1000 \times 1000}{4 \times 10} = 25 \times 25 = 625$ ।

अथवा इष्ट = १, अब त्रैासिक से—

∴ १०० रु० का १ मास में ५ रु० सूद होता है ।

∴ १ रु० का १ मास में $\frac{5}{100}$ रु० सूद होगा ।

∴ १ रु० का १२ मास में $\frac{5 \times 12}{100} = \frac{6}{5}$ रु० सूद होगा ।

∴ १ रु० का मिश्रघन = $1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}$ रु० । अब अनुपात करने से

∴ $\frac{11}{5}$ रु० मिश्रघन १ रु० मूटघन पर होता है ।

∴ ८ रु० मिश्रघन ५ रु० मूटघन पर होगा ।

∴ १ रु० मिश्रघन $\frac{5}{11}$ रु० मूटघन पर होगा ।

∴ १००० रु० मिश्रघन $\frac{5 \times 1000}{11} = 454 \frac{5}{11}$ रु० मूटघन पर होगा ।

∴ $\frac{5 \times 1000}{11} = 454 \frac{5}{11} = 454 \frac{5}{11} = 454 \frac{5}{11}$ रु० = मूटघन ।

∴ सूद = मिश्रघन - मूटघन = $1000 - 454 \frac{5}{11} = 545 \frac{6}{11}$ ।

या—१ इष्ट पर से उक्त विधि द्वारा १ रु० का मिश्रघन = $\frac{11}{5}$ । अब इष्ट १ को इष्ट १००० से गुणा किया तो १००० हुआ । इसे $\frac{5}{11}$ से भाग देने पर मूटघन थाया = $\frac{1000 \times 5}{11} = 454 \frac{5}{11}$ । ∴ सूद = $1000 - 454 \frac{5}{11} = 545 \frac{6}{11}$ ।

परिशिष्ट ।

(१) किसी वस्तु के घी सैकड़े की जो दर हो, उसे प्रतिशतक कहते हैं ।

यथा—यदि १०० आम का ८ रु० मूल्य हो तो घी सैकड़े आम की दर = ८ रु० है । हमी तरह यदि ६ रु० में ८ आम कमीशन मिलते हैं तो प्रतिशतक कमीशन = $\frac{8 \times 100}{6} = \frac{400}{3}$ आ० = $133 \frac{1}{3}$ = $133 \frac{1}{3}$ = १३३ $\frac{1}{3}$ आ० ४ पा० । प्रतिशतक को $\frac{\%}{100}$ इस चिह्न से सूचित किया जाता है ।

(२) जिस मिश्र को प्रतिशतक में लिखना हो, उसे १०० से गुणा करने पर जो हो, वह प्रतिशतक होगा । यथा—१ का प्रतिशतक = $\frac{1 \times 100}{1} = 100$ ।

(३) किसी प्रतिशतक को मिश्र में प्रकट करने के लिये उसे १०० से भाग देना चाहिये । यथा—५ प्रतिशत = $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ ।

- ∴ ६२५ रु० " " " $\frac{६२५ \times ३०}{१००} = १८७.५$ रु० ७ आ० ।
- ∴ १ वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ६२५ + १८७.५ रु० ७ आ० = ८१२.५ रु० ७ आ० । वर्ष का । अब इसका १ वर्ष में $-\frac{३०}{१००} \times (८१२.५ + \frac{३०}{१००})$
 $= \frac{३०}{१००} \times (८१२.५ + \frac{३०}{१००}) = \frac{३० \times ८१२.५}{१००} = २४३.७५$ रु० १ आ० सूद होगा ।
- ∴ दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ८१२.५ रु० ७ आ० + २४३.७५ रु० १ आ० = १०५६.२५ रु० ८ आ० । अब फिर इसका १ वर्ष में सूद $\frac{३०}{१००} \times (१०५६.२५ + \frac{३०}{१००})$
 $= \frac{३०}{१००} \times (१०५६.२५ + \frac{३०}{१००}) = \frac{३० \times १०५६.२५}{१००} = ३१६.८७५$ रु० = ३१६.८७ रु० १३ आ० ३ पा० ।
- ∴ तीसरे वर्ष में मिश्रधन = १०५६.२५ रु० ८ आ० + ३१६.८७ रु० १३ आ० ३ पा० = १३७३.१२ रु० २ आ० ३ पा० ।
- ∴ प्रारम्भिक नूटधन = ६२५ रु० । चक्रवृद्धि व्याज = ५२३.७५ रु० २ आ० ३ पा० उत्तर ।

साधारण सूद का उदाहरण ।

(२) ६५ रु० का ९ महीने में प्रति वर्ष १ + $\frac{३}{१००}$ आ० महीने की दर से साधारण व्याज क्या होगा ।

- ∴ १ रु० का १ महीने में $\frac{३}{१००}$ आ० सूद होता है ।
- ∴ ६५ रु० का १ महीने में $\frac{३}{१००} \times ६५$ आ० सूद होगा ।
- ∴ ६५ रु० का ९ महीने में $\frac{३ \times ६५ \times ९}{१००} = \frac{१६६.६५}{१००}$ आ० = १.६६६६५ रु० = ५४ रु० १३ आ० ६ पा० = उत्तर ।

(३) ९३५ रु० का ४ वर्ष में ५ रु० सैकड़ा वार्षिक सूद की दर से सूद बताओ ।

यहाँ ५ प्रतिशत प्रतिवर्ष सूद है अतः ४ वर्षों के लिए $(५ \times ४) = २०$ प्रतिशत हुआ । इस हेतु ९३५ रु० का साधारण व्याज = $\frac{९३५ \times २०}{१००} = १८७$ रु० । इसी तरह अनेक प्रकार से उत्तर ज्ञात चाहिये ।

(४) नूटधन, सूद, समय और सूद का दर ये चारों चीजें दिये हुए सूद के द्वारा सम्बन्धित हैं, जिसके प्रयोग से बड़ी सुविधा होती है ।

यदि संकेत में नूटधन = N , सूद = S , समय = T , दर = R ।

से ३०० प्राप्त किया, तो उनके धनों को बाँटने पर उनको कितने २ धन मिले ?
 प्रक्षेपकन्यासः । ५१ । ६८ । ८५ । मिश्रधनम् ३०० । जानानि
 धनानि ७५ । १०० । १२५ । एतान्यादिधनैस्त्वानि लाभाः २४ । ३३ । ४०
 अथ वा मिश्रधनम् ३०० । आदिधनैस्त्वनं २०४ ऊनं सर्वलाभ-
 योगः ६६ । अस्मिन् प्रक्षेपगुणिते प्रक्षेपयोग २०४ भक्ते लाभाः
 २४ । ३२ । ४० ।

उदाहरण—यहाँ प्रश्न के अनुसार प्रक्षेपक क्रम से ५१, ६८, ८५ हैं ।
 मिश्रधन = ३०० । अब अपने-अपने प्रक्षेपकों को मिश्र धन ३०० से गुणाकर
 प्रक्षेपकों के योग (५१ + ६८ + ८५) = २०४ से भाग देने पर क्रम से—
 $\frac{५१ \times ३००}{२०४} = ७५$ । $\frac{६८ \times ३००}{२०४} = १००$ । $\frac{८५ \times ३००}{२०४} = १२५$ हुये । इनमें
 अपने-अपने प्रक्षेपक घटाने से क्रम से लाभ होंगे । यथा—७५ - ५१ = २४ =
 प्रथम । १०० - ६८ = ३२ = द्वितीय । १२५ - ८५ = ४० = तृतीय ।

विशेष-नवीनरीति से प्रश्नोत्तर ।

सान्ता (Share)

(१) क, ख और ग ने क्रम से ६००० रु०, ८००० रु० और १०००० रु०
 किसी व्यापार में लगाया, तो लाभ २००० हुआ । इसको लगी हुई
 पूंजी के अनुपात में बाँटो ?

उत्तर—यहाँ क, ख और ग के धन का योग = २४००० रु० ।

∴ २४००० रु० में क का ६००० रु० है ।

∴ २४००० रु० में क का = $\frac{६००० \times ४०००}{२४०००} = \frac{२४०००}{२४} = १०००$

इसी तरह ख का = $\frac{८००० \times ४०००}{२४०००} = \frac{३२०००}{२४} = \frac{४०००}{३} =$

१३३३३ रु० ५ आ० ४ पा० । एवं ग का = $\frac{१०००० \times ४०००}{२४०००} =$

$\frac{४००००}{२४} = \frac{५०००}{३} = १६६६ रु० १० आ० ८ पा० ।$

(२) राम ने ५०० रु० लगाकर एक व्यापार आरम्भ किया, २ महीने के बाद
 श्याम सामिल हुआ और उसने ३०० रु० लगाया, उसके ३ महीने के
 बाद हरि ने २०० रु० देकर सामिल हुआ और उसके ४ महीने के बाद
 यदु ने ३०० रु० देकर सामिल हुआ, साल के अन्त में कुल नफ़ा ८०० रु०
 यदि हो, तो चारों को कितने-कितने मिलेंगे ।

(५) क, न, ग और व चारों ने एक व्यापार में क्रम से ४४, ११०, १३२ और १२८ रु० लगाया । यदि व्यापार से उनको ५८३ रु० मिले, तो प्रत्येक को कितने रु० मिले ।

वाप्यादिपूरणे करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

भजेच्छिदोऽशैरथ तैर्विमिश्रै रूपं भजेत् स्यात् परिपूर्तिकालः ॥१३॥

द्विदः अंशैर्भवेत् । त्रय तैर्विमिश्रैः रूपं भवेत् । लघं परिपूर्तिकालः स्यात् ।

अपने २ अंशों से हर में भाग दें और उनके योग से १ में भाग दें तो पूर्ति का समय हो जायगा ।

उपपत्तिः—अत्र कल्पन्ते तावन्निराणां वाप्यादिपूरणकालाः—

$\frac{अ}{क}, \frac{ग}{व}, \frac{घ}{त}$, ततोऽनुपातः—यद्युक्तकालैः निर्राः पृथक्-पृथक् वापी

पूरयन्ति तदैकेन दिनेन क्षिति जातानि वाप्यंशपूरणप्रमाणानि—

$\frac{१ \times १}{अ} = \frac{क}{अ}$ । एवं $\frac{व}{ग}, \frac{त}{घ}$ । ततोऽन्योऽनुपातः—यद्येषां योगेनैकं

दिनं तदा समस्तवापीपूरणे क्षिति जातं वापीपूरणकालमानम्—

१×१

$\frac{क}{अ} \div \frac{व}{ग} \div \frac{त}{घ}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

ये निर्रा दिनादिनार्थवृत्तीयपट्टैः संपूरयन्ति हि पृथक् पृथगेव मुक्ताः ।

वापी यदा युगपदेव सखे ! विमुक्तास्ते केन वासरलवेन तदा वदाशु ॥१॥

हे मित्र ! ४ झरनों को अलग-अलग खोलने पर १ वापी को क्रम से १ दिन, ३ दिन, ३ दिन और ३ दिन में भरते हैं, यदि सब एक ही वार खोल दिये जाय, तो दिन के कितने भाग में भरेंगे । यह शीघ्र बताओ ।

न्यासः । $\frac{१}{३} \mid \frac{३}{३} \mid \frac{३}{३} \mid \frac{३}{३}$ ।

लघ्यो वापीपूरणकालो दिनांशः $\frac{१}{३}$ ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास = $\frac{१}{३} \mid \frac{३}{३} \mid \frac{३}{३} \mid \frac{३}{३}$ । अब सूत्र के अनुसार हर में अंश से भाग देने पर— $\frac{१}{३}, \frac{३}{३}, \frac{३}{३}, \frac{३}{३}$ हुए । इनका योग =

६ ली०

स्वमूल्यानि स्वभागैः हत्वा, पण्यैः भजेत्, च (पुनः) तानि, भागांश्च मिश्रेण घनेन हत्वा तदैक्येन भजेत् । लब्धानि नौल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ॥

अपने-अपने मूल्य को अपने-अपने भाग से गुणाकर अपने-अपने पण्य (भाव) से भाग दें, तब जो फल मिले उनको और भागों को अलग-अलग मिश्रघन से गुणा कर उन (फल) के योग से भाग दें तो मूल्य और पण्य (परिमाण) क्रम से हो जाँयेंगे ॥ ५ ॥

उपपत्तिः—अत्रानुपातेन स्वभागसम्बन्धीयनौल्यानि =

$\frac{\text{स्व. नू.} \times \text{स्व. भाग}}{\text{स्व. पण्य}}$ । पुनरनुपातः—प्रयेषां योगेनैतानि पृथक्-पृथक् नौल्यानि तयोक्तभागांश्च लभ्यन्ते तदा मिश्रघनेन क्रिमिति जातानि मूल्यानि पण्यानि वेति ।

उद्देशकः ।

सायं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्हेण मानाष्टकं
मुद्गानां च यदि त्रयोदशमिता एता वणिक् ! काकिणीः ।
आदायार्पय तण्डुलांशयुगलं मुद्गैकभागान्वितं
क्षिप्रं क्षिप्रनुजो भजेम हि यतः सायंऽप्रतो चास्यति ॥ १ ॥

हे वणिक् ! यदि १ द्रम्म में ३३ मान चावल और ८ मान मुद्ग (मूंग) अलग-अलग मिलते हैं, तो ये १३ काकिणी लेकर दो भाग चावल और १ भाग मूंग दो । मैं शीघ्र भोजन करके जाऊँगा, क्योंकि मेरा सायां भागे चढ़ जायगा ॥ १ ॥

न्यासः । पण्ये ३ । ६ । नौल्ये ६ । ६ । स्वभागों ३ । ६ । मिश्रघनम् ३ ३/४ ।
अत्र स्वमूल्ये स्वभागगुणिते, पण्याभ्यां भक्ते जाते ६ । ३ । भागों
च । ३ । ६ । मिश्रघनेन ३ ३/४ संगुण्य तदैक्येन भक्ते जाते तण्डुलमुद्गमूल्ये
३ । ३ ३/४ । तथा तण्डुलमुद्गमाने भागौ ३ ३/४ । ३ ३/४ । अत्र तण्डुल-
मूल्ये पर्णौ २ । काकिण्यौ २ । वराटकाः १३ ३/४ । मुद्गमूल्ये काकिण्यौ २ ।
वराटकाः ६ ३/४ ।

उदाहरण—पण्य ३ । ६ । नौल्य ६ । ६ । स्वभाग ३ । ६ । मिश्रघन =
१३ काकिणी ∴ ३ ३/४ = द्रम्म ।

नरप्रदानोनितरत्नशेषैः इष्टे हते त्रलु मौल्यसंख्याः स्युः । अथवा—शेषवधे पृथक्स्थैः शेषैर्हते अनिन्नमूल्यानि भवन्ति ।

ननुप्य संख्या से गुणे हु वेदान की संख्या से घटा हुआ जो रत्न शेष, उनसे इष्ट राशि में भाग दें, तो रत्नों के अलग-अलग मूल्य निकल जाते हैं । अथवा—शेषों के घात में शेषों से भाग देने पर मूल्य की संख्या अनिन्न होती है ।

उपपत्तिः—नरसंख्या = न । एकस्मै दानसंख्या = दा । ततोऽनुपातेन नरसंख्यादानमानम् = $\frac{दा \times न}{१} = दा \times न$ । रत्नसंख्या = २० सं० ।

∴ २० सं० - दा × न = समघनानि । अत्र समघनमिष्टं प्रकल्प्य पुनरनुपातः—यदि पृथग् रत्नशेषैरिष्टं घनं तदैकेन क्रिमिति पृथग् रत्नमूल्यानि भवन्ति । अनिन्नरत्नमूल्यज्ञानार्थं रत्नशेषघातसममिष्टं प्रकृष्टिमिति ।

अत्रोद्देशकः ।

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं
सद्वज्राणि च पञ्च रत्नवणिजां येषां चतुर्णां धनम् ।

सङ्गत्नेह्वरोने ते निजवनाहस्त्वैकनेकं मियो

जातास्तुल्यघनाः पृथग् वद सखे ! तद्रत्नमौल्यानि मे ॥ १ ॥

हे मित्र ! चार रत्न के व्यापारियों में एक के पास ८ माणिक्य, दूसरे के पास १० नीलम, तीसरे के पास १०० मोती और चौथे के पास ५ उत्तम हीरे थे । उन्होंने प्रेम के कारण अपने-अपने धनसे एक-एक रत्न दूसरों को दे दिया, तो सब के पास समान धन हो गये अतः उन रत्नों के मूल्य अलग-अलग बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । ना ८ । नी १० । नु १०० । व ५ । दानम् १ । नराः ४ । नरगुणितदानेन ४ । रत्नसङ्ख्यासूनिवासु शेषाः मा ४ । नी ६ । नु ६६ । व १ । एतैरिष्टराशौ भक्ते रत्नमूल्यानि स्युरिति । तानि च यथाकथञ्चिदिष्टे कल्पिते भिन्नानि । अत्रेष्टं स्वधिया कल्प्यते । तथाऽत्रापीष्टं कल्पितम् ६६ ।

अतो जातानि मूल्यानि २४ । १६ । १ । ६६ । समघनम् २३३ । अथवा शेषाणां घाते २३०४ । पृथक् शेषैर्भक्ते जातान्यभिन्नानि ५७६ । ३८४ । २४ । २३०४ । जनानां चतुर्णां तुल्यघनम् ५५६२ । तेषामेते द्रन्माः संभाव्यन्ते ।

- (३) क के पास १८० नेपाली सिक्के हैं, और ख के पास १०० भारतीय मुद्राएँ और ग के पास ९५ अमेरिकन मुद्राएँ हैं, तीनों ने अपने धन से दस-दस मुद्राएँ अपने प्रत्येक साथी को दीं, तो सब के पास तुल्य धन हो गया अतः मुद्राओं का मूल्य बताओ ।
- (४) यदि हरि के पास ३० पेड़े और हर के पास ४५ रसगुल्ले हों, और वे दोनों एक दूसरे को १० मिठाइयाँ दे दें, तो उनके पास तुल्य दाम की मिठाइयाँ हो जायँ, तो मिठाइयों का दाम अलग-अलग बताओ ।
- (५) क के पास ९ बीघे धान का खेत, ख के पास १२ बीघे जनेरे का खेत, और ग के पास ३० बीघे यव का खेत है । वे अपने खेत में से दो-दो बीघे एक दूसरे को दे देते हैं तब सबों के पास समान सम्पत्ति हो जाती है, तो उनके अलग-अलग खेत की दर बताओ ।

अथ सुवर्णगणिते करणसूत्रं वृत्तम्

सुवर्णवर्णाहितियोगराशौ स्वर्णैक्यभक्ते कनकैक्यवर्णः ।

वर्णो भवेच्छोधितहेमभक्ते वर्णोद्धृते शोधितहेमसंख्या ॥ १६ ॥

सुवर्णवर्णाहिति योगराशौ स्वर्णैक्यभक्ते सति कनकैक्यवर्णः स्यात् । शोधितहेमभक्ते सति वर्णः स्यात् । वर्णोद्धृते सति शोधितहेमसंख्या भवेत् ।

सुवर्णानां की संख्या को अलग-अलग अपने-अपने वर्णों से गुणा कर, सब के योग में सुवर्णानां की संख्या के योग से भाग देने पर सोने के योग का वर्ण हो जायगा । यदि उसी योग में शोधित सुवर्ण मान की संख्या से भाग दें तो सोने का वर्ण होगा । या उसी योग में वर्ण से भाग देने पर शोधित सुवर्ण की संख्या होगी ॥ ७ ॥

उपपत्तिः—कस्यापि समभाषस्य मूल्यं वर्णः कथ्यते । कल्प्यते समभाष प्रमाणम् = स० मा० । ततोऽनुपातः—यदि समभाषमितसुवर्णेन प्रथम

वर्णस्तदा प्रथमसुवर्णभाषेन किमिति प्रथमसुवर्णनौख्यम् = $\frac{\text{प्र. व} \times \text{प्र. सु. मा.}}{\text{स. मा.}}$

एवं द्वितीयसुवर्णनौख्यम् = $\frac{\text{द्वि. व} \times \text{द्वि. सु. मा.}}{\text{स. मा.}}$ एवमग्रेऽपि । अनयोर्योगः—

उदाहरण—यहाँ वर्ण और मासे को न्यास करने पर सूत्र के

वर्ण	१३	१२	११	१०
मापा	१०	४	२	४

अनुसार सुवर्ण और वर्ण के घात क्रम से—

$$१३ \times १० = १३० \quad १२ \times ४ = ४८ \quad ११ \times २ =$$

$$२२ \quad १० \times ४ = ४० \text{ हुये। इनका योग =}$$

$$१३० + ४८ + २२ + ४० = २४० \text{। तथा सुवर्णयोग} = १० + ४ + २ + ४ = २० \text{।}$$

$$\therefore \text{स्वर्णैक्य वर्ण} = २४० \div २० = १२ \text{।}$$

$$\text{यदि शोधित हेम} = १६ \text{ मापा, तो वर्ण} = २४० \div १६ = १५ \text{। यदि वर्ण} = १६ \text{ तदा शोधितहेममापा} = २४० \div १६ = १५ \text{।}$$

अथ वर्णज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम्।

स्वर्णैक्यनिष्ठाद्युत्तिजातवर्णात् सुवर्णतद्वर्णवधैक्यहीनात्।

अज्ञातवर्णाग्निजसंख्ययाऽऽप्तमज्ञातवर्णस्य भवेत् प्रमाणम् ॥१७॥

युत्तिजातवर्णात् स्वर्णैक्यनिष्ठात् सुवर्णतद्वर्णवधैक्यहीनात् अज्ञातवर्णाग्निजसंख्ययाऽप्त, अज्ञातवर्णस्य प्रमाणं भवेत्।

बनेक प्रकार के सोने को एक साथ मिलाने पर उत्पन्न जो वर्ण होता है उसे युत्तिजातवर्ण कहते हैं। युत्तिजात वर्ण को सोने के योग से गुणा कर उसमें सुवर्ण और अपने-अपने वर्ण के घातों के योग को बटावें। शेष में अज्ञात वर्ण सोने की संख्या से भाग दें, तो अज्ञात वर्ण का मान हो जायगा।

उपपत्तिः—अज्ञातवर्णमानम् = य, ततः 'सुवर्णवर्णाहति योगराशावि'ति

$$\text{सूत्रेण युत्तिजातवर्णः} = \text{यु. व.} =$$

$$\frac{\text{प्र. सु.} \times \text{प्र. व} + \text{द्वि. सु.} \times \text{द्वि. व} + \text{तृ. सु.} \times \text{य}}{\text{सु. यो.}}$$

सु. यो.

$$\therefore \text{यु. व.} \times \text{सु. यो.} = \text{प्र. सु.} \times \text{प्र. व} + \text{द्वि. सु.} \times \text{द्वि. व} + \text{तृ. सु.} \times \text{य}$$

$$\therefore \text{तृ. सु.} \times \text{य} = \text{यु. व.} \times \text{सु. यो.} - \{ \text{प्र. सु.} \times \text{प्र. व} + \text{द्वि. सु.} \times \text{द्वि. व} \}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{यु. व.} \times \text{सु. यो.} - \{ \text{प्र. सु.} \times \text{प्र. व} + \text{द्वि. सु.} \times \text{द्वि. व} \}}{\text{तृ. सु.}}$$

तृ. सु.

अत उपपन्नम्।

उदाहरणम्।

दशेशवर्णा वसुनेत्रमापा अज्ञातवर्णस्य पडेत्तदैक्ये।

जातं सखे ! द्वादशकं सुवर्णमज्ञातवर्णस्य वद् प्रमाणम् ॥ १ ॥

$$\therefore य = \frac{\text{यु व (प्र. सु + द्वि. सु)} - (\text{प्र. सु} \times \text{प्र. व} + \text{द्वि. सु} \times \text{द्वि. व})}{\text{तृ. व} - \text{यु. व}}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

दशेन्द्रवर्णा गुणचन्द्रमाषाः किञ्चित् तथा षोडशकस्य तेषाम् ।

जातं युतौ द्वादशकं सुवर्णं कतीह ते षोडशवर्णमाषाः ? ॥ १ ॥

१० और १४ वर्ण के सोने क्रम से ३ और १ मापे हैं । १६ वर्ण के सोने ही कुछ मापा है । इनको मिलाने से १२ वर्ण का सोना हो जाता है, तो १६ वर्ण के सोने की मापा बताओ ।

न्यासः । $\frac{१०}{१} \times \frac{१४}{१} = \frac{१४०}{१}$ लब्धं मापमानम् ? ।

उदाहरण—वर्ण १०।१४।१६ ! युतिजात वर्ण = १२
मापा ३।१।०

यहाँ सूत्र के अनुसार १२ को सोने का योग ३ + १ = ४ से गुणा किया तो ४८ हुआ, इसमें स्वर्णान्वर्णैक्य १० × ३ + १४ × १ = ४४ को बटाया तो ४८ - ४४ = ४ हुआ । इसे अज्ञात सोने का वर्ण १६ और युतिजात वर्ण १२ का अन्तर ४ से माग देने पर ४ ÷ ४ = १ अज्ञात सुवर्ण का मान आया ।

सुवर्णज्ञानाद्यान्यत् करणसूत्रं वृत्तम् ।

साध्येनोनोऽनल्पवर्णां विधेयः साध्यो वर्णः स्वल्पवर्णोऽनितश्च ।

इष्टशुष्णे शेषके स्वर्णमाने स्यातां स्वल्पानल्पयोर्वर्णयोस्ते ॥१६॥

अनल्पवर्णः साध्येन ऊनः विधेयः, साध्यः वर्णः स्वल्पवर्णोऽनितः, शेषके इष्टशुष्णे ते क्रमेण स्वल्पानल्पयोः वर्णयोः स्वर्णमाने स्याताम् ।

अधिक वर्ण में साध्यवर्ण को और साध्य वर्ण में अल्पवर्ण को बटाकर दोनों शेषों को इष्ट से गुणा करने पर क्रम से अल्प और अधिक वर्ण की सुवर्ण संख्या होती है ।

उपपत्तिः—अत्र कल्प्यते अनल्पवर्णः = अ । स्वल्पवर्णः = उ । अज्ञात-स्वर्णमाने क्रमेण य, क । साध्यवर्णः = सा.व । अत्र 'सुवर्णवर्णाहति योग-

राशावि'स्यादिना—यु.व = $\frac{\text{अ} \times \text{य} + \text{उ} \times \text{क}}{\text{य} + \text{क}} = \text{सा.व} ।$

$$\therefore य = \frac{यु व (प्र \cdot सु + द्वि \cdot सु) - (प्र \cdot सु \times प्र \cdot व + द्वि \cdot सु \times द्वि \cdot व)}{तृ \cdot व - यु \cdot व}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

दशेन्द्रवर्णां गुणचन्द्रमापाः किञ्चित् तथा षोडशकस्य तेषाम् ।

जातं युतौ द्वादशकं सुवर्णं कतीह ते षोडशवर्णमापाः ? ॥ १ ॥

१० और १४ वर्ण के सोने क्रम से ३ और १ मापे हैं । १६ वर्ण के सोने की कुछ मापा है । इनको मिलाने से १२ वर्ण का सोना हो जाता है, तो १६ वर्ण के सोने की मापा बताओ ।

न्यासः । $\frac{१०}{१५} \times \frac{१६}{१०}$ लब्धं मापमानम् ।

उदाहरण—वर्ण १०।१४।१६ । युतिजात वर्ण = १२
मापा ३।१।०

यहाँ सूत्र के अनुसार १२ को सोने का योग ३ + १ = ४ से गुणा किया तो ४८ हुआ, इसमें स्वर्णघनवर्णक्य १० × ३ + १४ × १ = ४४ को घटाया तो ४८ - ४४ = ४ हुआ । इसे अज्ञात सोने का वर्ण १६ और युतिजात वर्ण १२ का अन्तर ४ से भाग देने पर ४ ÷ ४ = १ अज्ञात सुवर्ण का मान आया ।

सुवर्णज्ञानायान्यत् करणसूत्रं वृत्तम् ।

साध्येनोनोऽनल्पवर्णो विधेयः साध्यो वर्णः स्वल्पवर्णोनितश्च ।

इष्टशुण्णे शेषके स्वर्णमाने स्यातां स्वल्पानल्पयोर्वर्णयोस्ते ॥१६॥

अनल्पवर्णः साध्येन ऊनः विधेयः, साध्यः वर्णः स्वल्पवर्णोनितः, शेषके इष्टशुण्णे ते क्रमेण स्वल्पानल्पयोः वर्णयोः स्वर्णमाने स्याताम् ।

अधिक वर्ण में साध्यवर्ण को और साध्य वर्ण में अल्पवर्ण को घटाकर दोनों शेषों को इष्ट से गुणा करने पर क्रम से अल्प और अधिक वर्ण की सुवर्ण संख्या होती है ।

उपपत्तिः—अत्र कल्प्यते अनल्पवर्णः = अ । स्वल्पवर्णः = उ । अज्ञात-स्वर्णमाने क्रमेण य, क । साध्यवर्णः = सा.व । अत्र 'सुवर्णवर्णाहति योग-

राशाविध्यादिना—यु.व = $\frac{अ \times य + उ \times क}{य + क} = सा. व ।$

एकाद्येकोत्तराः अङ्काः व्यस्ताः स्याप्याः । ते क्रमस्थितैः अङ्कैः भाज्याः, परः पूर्वेण संगुण्यः, तेन तत्परः संगुण्यः, तेन च पुनः तत्परः संगुण्यः । एवं क्रमेण एकद्वित्र्यादि भेदाः स्युः । इदं साधारणं स्मृतम् । अस्य गणितस्य छन्दसि छन्दश्चित्युत्तरे, नृपावहनभेदादौ, खण्डमेरौ, शिख्यके, वैद्यके, रसभेदाद्ये च तद्विदासुपयोगः भवति, तत् विस्तृतेः भयात् न उक्तम् ।

एकादि अङ्क के भेद जानने के लिये पहले संख्या पर्यन्त एकादिक अङ्क को उष्क्रम से लिखें । उनके नीचे संख्या पर्यन्त एकादिक अङ्क क्रम से हर की जगह में लिखकर पिछले अङ्क से आगे वाले को गुणा करे, फिर उससे आगे वाले अङ्क को गुणा करे । इस तरह संख्या पर्यन्त अङ्कों की उच्चरति से गुणा करने पर एकादि अङ्क के भेद होते हैं । यह साधारण नियम है । छन्दःशास्त्र में छन्द के चित्युत्तर अर्थात् एकादि लघु वा गुरु जानने में, नृपावहन, खण्डमेरु, शिख्यशास्त्र और वैद्यशास्त्र में रस के भेद जानने में इसका उपयोग होता है । वे विस्तर के भय से यहाँ सभी के उदाहरण नहीं दिये गये ॥ ३३ ॥

उपपत्तिः—यदि 'न'मितेषु वर्णेषु प्रतिवारं 'व'नितान् भिन्न-भिन्नवर्गानादाय प्रत्येकस्थाने स्थानस्यापरिवर्तनेन निवेश्यन्ते, तदा निवेशनप्रकारः क्रियमितो भवतीत्यस्य ज्ञानं क्रियते ।

करप्यन्ते—अ, क, ग, व, च... इत्यादि 'न'संख्यकवर्णाः । अत्र न मितेषु वर्णेषु प्रतिवारमेकैकं वर्णं गृहीत्वा यदि स्थाप्यते तदा न संख्यक प्रकारैस्तेषां निवेशनं भवितुमर्हति, तेन प्रथमभेदस्तु पदतुरयः । यद्युक्त्वर्णेषु 'अ' गृहीत्वा शेषेषु (न—१) मितवर्णेषु प्रत्येकेन सह संयोगेन (न—१) मितः स्थानद्वयभेदा यत्र सर्वत्र भेदादौ 'अ' वर्तते । एवं 'क' आदिवर्गानामपि क्रमेणैकैकं ग्रहणेन स्थानद्वये न—१ मितः एव भेदा यत्र भेदादौ सर्वत्र क्रमेण क आदयो वर्गाः सन्ति । एवं कृते सति न मितः भेदपरम्पराः स्युरतः सर्वभेदयोगः = न (न—१)

परञ्चात्र प्रतिभेदपरम्परायाः संदर्शनेन .अक, कअ, अग, गअ, अव, वअ इत्यादयो भेदाः वर्तन्ते, यत्र स्थानपरिवर्तितसमानवर्णद्वयविशिष्टभेदयोर्द्वयो-

द्वयोर्मध्ये एकस्यैवाङ्कीकारात्पूर्वोक्तभेदाद्विभक्ता जाता वास्तवभेदाः = $\frac{n(n-1)}{2}$

उदाहरण—गायत्री के मूलक चरण में ६ अक्षर होते हैं, अतः सूत्र के अनुसार न्यास करने पर—६, ५, ४, ३, २, १
१, २, ३, ४, ५, ६

$$\begin{aligned} \therefore \text{एक गुरु के व्यक्ति} &= \frac{6}{1} = 6 \\ \text{दो " " " " } &= \frac{6 \times 5}{2} = 15 \\ \text{तीन " " " " } &= \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20 \\ \text{चार " " " " } &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2} = 15 \\ \text{पाँच " " " " } &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 6 \\ \text{छः " " " " } &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 1 \end{aligned}$$

और एक सर्व लघु होंगे ।

∴ इनका योग करने पर चरण के व्यक्ति ६ + १५ + २० + १५ + ६ + १ = ६३ । इसी तरह गायत्री के चारों चरणों के अक्षरों को जोड़कर उसका नेद निकालने पर वृत्त व्यक्ति की संख्या = १६७७७२१६ ।

उदाहरणं शिल्पे ।

एकद्वित्र्यादिनिपावहननितिमहो ब्रूहि ने भूमिभर्तु-
हन्त्ये रन्त्येऽष्टनूपे चतुरविरचिते श्लक्ष्णशालाविशाले ।

एकद्वित्र्यादियुक्त्या मधुरकडुकपायान्शक्षारतिकै-

रेकस्मिन् पडसैः स्युर्गणक ! कति वद व्यञ्जने व्यक्तिभेदाः ? ॥२॥

हे गणक, चतुर जन से बनाये हुये, चौड़े दालान से सुशोभित आठ मुक्त वाले सुन्दर रात्र महल में १, २, ३, ४ आदि त्रिद्विक्रियों को अलग-अलग खोलने से वायु के कितने भेद होंगे, तथा एक ही व्यञ्जन में मधुरादि छः रसों से १, २, ३, ४ आदि रसों के अलग-अलग योग से व्यक्ति भेद कितने कितने होंगे ।

न्यासः । $\frac{6}{1} \frac{6}{2} \frac{6}{3} \frac{6}{4} \frac{6}{5} \frac{6}{6} \frac{6}{7} \frac{6}{8} \frac{6}{9} \frac{6}{10} \frac{6}{11} \frac{6}{12}$ ।

लघ्वा एकद्वित्र्यादिनिपावहनसंख्याः ८, २८, ५६, ९०, ५६, २८, ८,
१ । एवमष्टनूपे राजगृहे निपावहनभेदाः २५५ ।

अथ द्वितीयोदाहरणे न्यासः $\frac{6}{1} \frac{6}{2} \frac{6}{3} \frac{6}{4} \frac{6}{5} \frac{6}{6} \frac{6}{7} \frac{6}{8} \frac{6}{9} \frac{6}{10} \frac{6}{11} \frac{6}{12}$ ।

$$\text{यदि } n = ३ \text{ तदा पूर्वयुक्त्या सङ्कलितम्} = \frac{३(३+१)}{२} = ३^३ + ३$$

$$\text{एकोनपदसङ्कलितम्} = \frac{(n-१)^२ + (n-१)}{२}$$

$$\text{तथा द्वयपदसङ्कलितम्} = \frac{(n-२)^२ + (n-२)}{२}$$

एतेषां योगः सङ्कलितैक्यम् ।

$$= \text{सं० ऐ०} = \frac{\text{एकादिवर्गयो + सं}}{२}$$

परञ्चात्र द्विपदं कृतं त्रिविधकमित्यादिना एकादिवर्गयोगः

$$= \frac{(२ \times n + १)(n+१)n}{३} = \frac{(२n+१)}{३} \times \text{सं०}$$

$$\text{सं० ऐ०} = \frac{(२n+१) \text{ सं + सं}}{३}$$

$$= \frac{\text{सं०} \left\{ \frac{२n+१}{३} + १ \right\}}{३} = \frac{\text{सं०} \left\{ \frac{२n+१+३}{३} \right\}}{३}$$

$$= \frac{०(२n+४)}{२ \times ३} = \frac{\text{सं०} \times २(n+२)}{२ \times ३} = \frac{\text{सं०}(n+२)}{३}$$

अत एव सर्वम् ।

अथ सङ्कलितैक्ययोगानयनम् ।

$$\text{सङ्कलितैक्यम्} = \frac{\text{सं०}(n+२)}{३} = \frac{n(n+१)}{२} \times \frac{(n+२)}{३}$$

$$= \frac{(n^२+n)(n+२)}{६} = \frac{n^३+n^२+२n^२+२n}{६} = \frac{n^३+३n^२+२n}{६}$$

यद्यत्र $n = १$

$$\text{तदा सं० ऐ०} = \frac{१^३ + ३ \times १^२ + २ \times १}{६} = १$$

$$\text{यदि } n = २ \text{ तदा सं० ऐ०} = \frac{२^३ + ३ \cdot २^२ + २ \cdot २}{६} = ४$$

१० ली०

$$\text{यदि } n = ३ \text{ तदा पूर्वयुक्त्या सङ्कलितम्} = \frac{३(३+१)}{२} = \frac{३^२}{२} + \frac{३}{२}$$

$$\text{एकोनपदसङ्कलितम्} = \frac{(n-१)^२}{२} + (n-१)$$

$$\text{तथा द्यूनपदसङ्कलितम्} = \frac{(n-२)^२}{२} + (n-२)$$

एतेषां योगः सङ्कलितैक्यम् ।

$$= \text{सं० ऐ०} = \frac{\text{एकादिवर्गयो} + \text{सं}}{२}$$

परञ्चात्र द्वित्रपदं क्युर्न त्रिविभक्तमित्यादिना एकादिवर्गयोगः

$$= \frac{(२ \times n + १)(n+१)n}{२} = \frac{(२n+१)}{३} \times \text{सं०}$$

$$\text{सं० ऐ०} = \frac{(२n+१) \text{सं} + \text{सं}}{३}$$

$$= \frac{\text{सं०} \left\{ \frac{२n+१}{३} + १ \right\}}{२} = \frac{\text{सं०} \left\{ \frac{२n+१+३}{३} \right\}}{२}$$

$$= \frac{\text{सं०} (२n+४)}{२ \times ३} = \frac{\text{सं०} \times २ (n+२)}{२ \times ३} = \frac{\text{सं०} (n+२)}{३}$$

अत उपपन्नं सर्वम् ।

अथ सङ्कलितैक्ययोगानयनम् ।

$$\text{सङ्कलितैक्यम्} = \frac{\text{सं०} (n+२)}{३} = \frac{n(n+१)}{२} \times \frac{(n+२)}{३}$$

$$= \frac{(n^२+n)(n+२)}{६} = \frac{n^३+n^२+२n^२+२n}{६} = \frac{n^३+३n^२+२n}{६}$$

यद्यत्र $n = १$

$$\text{तदा सं० ऐ०} = \frac{१^३+३ \times १^२+२ \times १}{६} = १$$

$$\text{यदि } n = २ \text{ तदा सं० ऐ०} = \frac{२^३+३ \times २^२+२ \times २}{६} = ४$$

१० ली०

$$\text{यदि } n = ३ \text{ तदा पूर्वयुक्त्या सङ्कलितम्} = \frac{३(३+१)}{२} = ३^३ + ३$$

$$\text{एकोनपदसङ्कलितम्} = \frac{(n-१)^२ + (n-१)}{२}$$

$$\text{तथा द्वोनपदसङ्कलितम्} = \frac{(n-२)^२ + (n-२)}{२}$$

एतेषां योगः सङ्कलितैक्यम् ।

$$= \text{सं० ऐ०} = \frac{\text{एकादिवर्गयो + सं}}{२}$$

परञ्चात्र द्विनपदं कुयुतं त्रिविभक्तमित्यादिना एकादिवर्गयोगः

$$= \frac{(२ \times n + १)}{३} \frac{(n+१)n}{२} = \frac{(२n+१)}{३} \times \text{सं०}$$

$$\text{सं० ऐ०} = \frac{(२n+१)}{३} \text{सं + सं}$$

$$= \frac{\text{सं०} \left\{ \frac{२n+१}{३} + १ \right\}}{२} = \frac{\text{सं०} \left\{ \frac{२n+१+३}{३} \right\}}{२}$$

$$= \frac{\text{सं०} (२n+४)}{२ \times ३} = \frac{\text{सं०} \times २ (n+२)}{२ \times ३} = \frac{\text{सं०} (n+२)}{३}$$

अत एव सर्वम् ।

अथ सङ्कलितैक्ययोगानयनम् ।

$$\text{सङ्कलितैक्यम्} = \frac{\text{सं०} (n+२)}{३} = \frac{n(n+१)}{२} \times \frac{(n+२)}{३}$$

$$= \frac{(n^२+n)(n+२)}{६} = \frac{n^३+n^२+२n^२+२n}{६} = \frac{n^३+३n^२+२n}{६}$$

यद्यत्र $n = १$

$$\text{तदा सं० ऐ०} = \frac{१^३ + ३ \times १^२ + २ \times १}{६} = १$$

$$\text{यदि } n = २ \text{ तदा सं० ऐ०} = \frac{२^३ + ३ \cdot २^२ + २ \cdot २}{६} = ४$$

१० ली०

अथ सङ्कलितात्पदानयनम् ।

$$\text{सङ्कलितम्} = \text{सं०} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{अत्र पदमानम्} = n,$$

$$\therefore 2 \text{ सं०} = n(n+1) = n^2 + n$$

पक्षी वसुभिः संगुण्य रूपं तद्विष्य ज्ञात्री

$$\therefore 2 \text{ सं०} + 1 = 2n^2 + 2n + 1$$

मूलग्रहणेन—

$$\sqrt{2 \text{ सं०} + 1} = 2n + 1$$

$$\therefore 2n = \sqrt{2 \text{ सं०} + 1} - 1$$

$$\therefore n = \frac{\sqrt{2 \text{ सं०} + 1} - 1}{2}$$

अतः—सङ्कलितं वसुनिघ्नं रूपयुतं तत्पदं व्येकम् ।

दलितं तदेव कथितं पदमानं धाधनैर्नियतम् ॥

इत्युपपद्यते ॥

उदाहरणम् ।

एकादीनां नवान्तानां पृथक् सङ्कलितानि मे ।

तेषां सङ्कलितैक्यानि प्रचक्ष्व गणकं द्रुतम् ? ॥ १ ॥

हे गणक, १ से लेकर ९ तक सभी अङ्कों के अलग-अलग सङ्कलित बताओ और उन्हीं अङ्कों के सङ्कलितैक्य भी कहो ।

न्यासः । १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ सङ्कलितानि १, ३, ६, १०, १५, २१, २८, ३६, ४५ एषामैक्यानि १, ५, १०, २०, ३५, ५६, ८४, १२०, १६५ ।

यहाँ १ से ९ तक का सङ्कलित जाना है,

$$\text{अतः सूत्र के अनुसार १ का संकलित} = \frac{(1+1) \times 1}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$१ \text{ से } २ \text{ तक का सङ्कलित} = \frac{(2+1) \times 2}{2} = ३$$

इसी तरह धागे भी किया करने से १ से ९ तक सभी अङ्कों का अलग-अलग सङ्कलित = १, ३, ६, १०, १५, २१, २८, ३६, ४५ हुये ।

$$= \frac{व.यो + सं}{२} । परञ्च पूर्वोक्तरीत्या संकलितं क्यम्$$

$$= \frac{सं (प + २)}{३}$$

$$\therefore \frac{सं (प + २)}{३} = \frac{व.यो + सं}{२}$$

$$\therefore व.यो + सं = \frac{२सं (प + २)}{२}$$

$$\begin{aligned} \therefore व.यो &= \frac{२सं (प + २)}{३} - सं = \frac{२सं.प + ४सं - ३सं}{३} = \frac{२सं.प + सं}{३} \\ &= सं (२प + १) \quad \text{अत उपपन्नं पूर्वार्धम् ।} \end{aligned}$$

अथ घनैक्यार्थं कल्प्यन्ते १, २, ३, ४.....प

एते विलोमेन निवेशिताः प, (प-१), (प-२), (प-३), (प-४)....२, १

तत्रैषां चतुर्वाताः प^३, (प-१)^३, (प-२)^३, (प-३)^३, (प-४)^३....२^३, १^३

अत्र प्रथमत्तण्डाद्द्वितीयं, द्वितीयात्तृतीयं, तृतीयाच्चतुर्थमेवं विसोधनेन

$$प^३ - (प-१)^३ = प^३ - (प^३ - ३प^२ + ६प - १) = ३प^२ - ६प + १$$

$$(प-१)^३ - (प-२)^३ = ३(प-१)^२ - ६(प-१) + १$$

$$(प-२)^३ - (प-३)^३ = ३(प-२)^२ - ६(प-२) + १$$

$$(प-३)^३ - (प-४)^३ = ३(प-३)^२ - ६(प-३) + १$$

$$(प-४)^३ - (प-५)^३ = ३(प-४)^२ - ६(प-४) + १$$

.....

$$\text{सर्वेषां योगः प^३ - १ = ३ \{ प^२ + (प-१)^२ + (प-२)^२ + (प-३)^२ + \dots + १^२ \}}$$

$$- ६ \{ प + (प-१) + (प-२) + (प-३) + \dots + १ \}$$

$$+ १ \{ प + (प-१) + (प-२) + (प-३) + \dots + १ \} - प$$

$$\text{वा } प^३ - १ = ३ व.यो - ६ व.यो + १ सं - प$$

$$\text{वा } ३ व.यो = प^३ + ६ व.यो - १ सं + प$$

$$= प^३ + \frac{६(२प + १)प(प + १)}{३ \times २} = \frac{३(प + १)प}{२} + प$$

इसी तरह आगे भी करने से १ से ९ तक का अलग-अलग घनयोग क्रमसे-१, ९, २७, १००, २२५, ४४१, ७८४, १२९६, २०२५ हुये।

यथोत्तरचयेऽन्त्यादिघनज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम् ।

व्येकपदत्रययो मुखयुक् स्यादन्त्यधनं मुखयुग्दलितं तत् ।

मध्यधनं पदसंगुणितं तत् सर्वधनं गणितं च तदुक्तम् ॥ ३ ॥

व्येकपदत्रयः मुखयुक् तदा अन्त्यधनं स्यात्, तत् (अन्त्यधनं) मुखयुक् दलितं मध्यधनं भवति, तत् (मध्यधनं) पदसंगुणितं सर्वधनं भवति, तदेव गणितं च उक्तम् ।

१ से घटे हुए पद (गच्छ) को चय से गुणाकर आदि जोड़ दें तो अन्त्यधन होता है। उस अन्त्यधन में आदि जोड़कर उसका आधा करें, तो मध्यधन होता है। उस मध्यधन को गच्छ से गुणा करने पर सर्वधन होता है, उसे गणित भी कहते हैं।

उपपत्ति—आदिः = आ, चयः = च, गच्छः = न, अन्त्यधनम् = अ. ध. मध्यधनम् = म. ध., सर्वधनम् = स. ध. ।

तदाऽऽलापानुसारेण—

म. ध. = आ + (आ + च) + (आ + २च) + + आ + (न - १) च
वा स. ध. = { आ + (न - १) च } + { आ + (न - २) च } + आ + (न - ३) च
+ + आ ।

∴ २ स. ध. = { २ आ + (न - १) च } + { २ आ + (न - १) च }
+ न पर्यन्तम् । वा २ स. ध. = { २ आ + (न - १) च } न

∴ म. ध. = $\frac{n}{2} \{ २ आ + च (न - १) \}$

अत्र अ. ध. = आ + च (न - १), न. ध. = $\frac{२ आ + च (न - १)}{२}$

= $\frac{आ + अ. ध.}{२}$ ।

∴ स. ध. = न. ध. ।

अत्र मध्यदिनसम्बन्धिधनं मध्यधनमुच्यतेऽतः समदिने गच्छे मध्य-
दिनाभावान्मध्याध्याक्परेत्यादि मारकरोक्तनुपपद्यते ।

गणिते (सर्वधने) गच्छहते व्येकपदन्नचयार्धविहीने सति वदनं स्यात् ।

सर्वधन में गच्छ से भाग देकर लब्धि में १ घटे हुए पद से गुणे हुये चय

का आधा घटा दें तो आदि होता है ।

उपपत्ति :—कल्प्यते आदि : = य ।

तदा व्येकपदन्नचयो मुक्तयुगेत्यादिना स. ध. = { २ य + (न - १) च } $\frac{न}{२}$ ।

∴ २ स. ध. = { २ य + (न - १) च } न ।

∴ $\frac{२ स. ध.}{न} = २ य + (न - १) च ।$

∴ २ य = $\frac{२ स. ध.}{न} - (न - १) च ।$

∴ य = $\frac{२ स. ध.}{२ न} - \frac{(न - १) च}{२} ।$

= $\frac{स. ध.}{न} - \frac{(न - १) च}{२}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

पञ्चाविक्रं शतं श्रेढीफलं सप्त पदं किल ।

चयं त्रयं त्रयं विदुमो वदनं वद नन्दन ! ॥ १ ॥

हे नन्दन, जहाँ सर्वधन १०५, गच्छ ३, और चय ३ है वहाँ आदि

धन बताओ ।

न्यासः । आ. ० । च. ३ । न. ७ । व. १०५ । आदिवनम् ६ । अन्य-

वनम् २४ । नव्यधनम् १५ ।

उदाहरण—आ० । च. ३ । गच्छ ३ । सर्वधन १०५ ।

अत्र सूत्र के अनुसार—१०५ ÷ ३ = ३५ । ३५ - (३ - १) × $\frac{३}{२}$

= ३५ - $\frac{३}{२}$ × ३ = ३५ - २ × ३ = ३५ - ६ = २९ आदि ।

∴ अन्यधन = २४ । नव्यधन = १५ ।

चयज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

गच्छहृतं धनमादिविहीनं व्येकपदार्धहृतं च चयः स्यात् ॥४॥

धनं (सर्वधनं) गच्छहृतम्, आदि विहीनं व्येकपदार्धहृतं चयः स्यात् ।

गच्छज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

श्रेढीफलादुत्तरलोचनघ्नाच्चयार्थवक्रान्तरवर्गयुक्तात् ।

मूलं मुखानं चयखण्डयुक्तं चयोद्भूतं गच्छमुदाहरन्ति ॥५॥

श्रेढीफलात् (सर्वघनात्) उत्तर लोचनघ्नात् (द्विचयगुणितात्) शेषं सप्तम् ।

सर्वं घन को चय और २ से गुणा कर गुणन फल में चय का भाषा और आदि के अन्तर वर्ग जोड़ कर वर्ग मूल लें । मूल में आदि घटा कर, शेष में चय का भाषा जोड़ दें और योग फल में चय से भाग दें, तो गच्छ होता है ।

उपपत्तिः—कल्प्यते आदिः = आ, चयः = च, गच्छः = य ।

तदा सर्वघनम् = स. घ. = { २ आ ÷ (य - १) च } य

∴ २ स. घ. = { २ आ + (य - १) च } य

= २ आ. य + (य - १) य. च. = २ आ. य + य^२ च - य च

∴ २ स. घ. × च = २ आ × य × च + य^२ × च - य × च

= य^२ × च + २ य × च (आ - $\frac{१}{२}$)

पक्षों (आ - $\frac{१}{२}$)^२ अनेन युक्तौ जातौ

२ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{१}{२}$)^२ = य^२ × च ÷ २ य × च (आ - $\frac{१}{२}$) ÷ (आ - $\frac{१}{२}$)^२

वा २ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{१}{२}$)^२ = { य × च + (आ - $\frac{१}{२}$) }^२

∴ √ २ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{१}{२}$)^२ = य × च + (आ - $\frac{१}{२}$)

∴ य × च = √ २ स. घ. × च · (आ - $\frac{१}{२}$)^२ - (आ - $\frac{१}{२}$)

= √ २ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{१}{२}$)^२ - आ + $\frac{१}{२}$

गच्छज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

श्रेढीफलादुत्तरलोचनघ्नात्रयार्थवक्यान्तरवर्गयुक्तात् ।

मूलं मुखानं चयखण्डयुक्तं चयोद्भूतं गच्छमुदाहरन्ति ॥५॥

श्रेढीफलात् (सर्वधनात्) उत्तर लोचनघ्नात् (द्विघ्नचयगुणितात्) शेषं स्पष्टम् ।

सर्व धन को चय और २ से गुणा कर गुगन फल में चय का आधा और आदि के अन्तर वर्ग जोड़ कर वर्ग मूल लें । मूल में आदि बटा कर, शेष में चय का आधा जोड़ दें और योग फल में चय से भाग दें, तो गच्छ होता है ।

उपपत्तिः—कल्प्यते आदिः = आ, चयः = च, गच्छः = य ।

तदा सर्वधनम् = स. घ. = { २ आ ÷ (च - १) च } य

∴ २ स. घ. = { २ आ ÷ (च - १) च } य

= २ आ. य ÷ (च - १) य. च = २ आ. य ÷ य. च - य. च

∴ २ स. घ. × च = २ आ × य × च ÷ य. च - य × च

= य. च - २ य × च (आ - $\frac{च}{२}$)

यद्यौ (आ - $\frac{च}{२}$)^२ अनेन युक्तौ ज्ञातौ

२ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{च}{२}$)^२ = य. च ÷ २ य × च (आ - $\frac{च}{२}$) ÷ (आ - $\frac{च}{२}$)^२

आ २ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{च}{२}$)^२ = (य × च ÷ (आ - $\frac{च}{२}$))^२

∴ √ २ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{च}{२}$)^२ = य × च ÷ (आ - $\frac{च}{२}$)

∴ य × च = √ २ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{च}{२}$)^२ - (आ - $\frac{च}{२}$)

= √ २ स. घ. × च ÷ (आ - $\frac{च}{२}$)^२ - आ ÷ $\frac{च}{२}$

तो उसका आधा करके वर्ग लिखें। (इस तरह १ घटाने और अर्धे करने से भी यदि विषमाङ्क हो, तो गुणक चिन्ह और यदि समाङ्क हो, तो वर्ग चिन्ह करना चाहिये। इस प्रकार जब तक पद की कुल संख्या समाप्त न हो जाय, तब तक करना चाहिये। तब अन्त्य चिन्ह से उल्टा गुणक और वर्गफल आधा चिन्ह तर्क साधन कर, उसमें १ घटाकर, दोष को गुणक में १ घटा कर उससे भाग दें। लब्धि को आदि से गुणा करें तो सर्वधन होता है।

उपपत्ति:—अत्रालापानुसारेणसर्वधनम्—

$$\text{स. ध.} = \text{आ.} + \text{आ. गु} + \text{आ. गु}^2 + \text{आ. गु}^3 + \dots + \text{आ. गु}^{(n-1)}$$

$$\therefore \text{गु} \times \text{स. ध.} = \text{आ. गु} + \text{आ. गु}^2 + \text{आ. गु}^3 + \dots + \text{आ. गु}^{n-1} + \text{आ. गु}^n$$

$$\therefore \text{स. ध.} (\text{गु} - 1) = \text{आ. गु}^n - \text{आ} (\text{गु}^n - 1)$$

$$\therefore \text{स. ध.} = \frac{\text{आ} (\text{गु}^n - 1)}{\text{गु} - 1}$$

अत्र यदि 'न' विषम संख्याऽस्ति तदा (न - १) सम संख्या स्यात् ।

$$\therefore \text{गु}^n = \text{गु} \cdot \text{गु}^{n-1} = \text{गु} \left\{ \frac{\text{गु}^{n-1} - 1}{\text{गु} - 1} \right\}^2 \text{ अत उपपन्नम् ।}$$

उदाहरणम् ।

पूर्व वराटकयुगं येन द्विगुणोत्तरं प्रतिज्ञातम् ।

प्रत्यहमर्थिजनाय स मासे निष्कान् ददाति कति ? ॥ १ ॥

किसी दाता ने पहले दिन २ वराटक किसी याचक को देकर प्रतिदिन द्विगुणित करके देने की प्रतिज्ञा की, तो ३० दिन में उसने कितने निष्कों का दान किया ।

न्यासः । आ. २ । च. २ । ग ३० ।

लब्धा वराटकाः २१४७४८२१६४६ । निष्कवराटकाभिर्भक्ता जाता-
निष्काः १०४८२५७ । द्रन्माः ६ । पणाः ६ । काक्किण्यौ २ । वराटकाः ६ ।

रूप हुआ। अब अन्तिम गुणक की जगह ३ लिखकर नीचे से ऊपर की
 ६ गुणक २१८७ और उलटी क्रिया करने से २१८७ हुआ। इसमें १ घटाने
 ३ वर्ग ७२९ पर २१८६ हुआ। इसकी ब्येक गुणक = (३-१) = २ से
 २ गुणक २७ भाग दिया, और लब्धि फिर आदि २ से ही गुणा की
 १ वर्ग ९ क्रिया तो २१८६ ही रहा।

० गुणक ३ ∴ सर्वधन = २१८६।

अनन्तपदे सर्वधनसूत्रम्।

आदिगुणविहीनेन रूपेण प्रथिभाजितः।

फलं गुणोत्तरे सर्वधनमानन्त्यके पदे ॥

अस्योपपत्तिः—गुणोत्तर श्रेढ्याः सर्वधनम् = $\frac{\text{आ} (गु^n - १)}{गु - १} \dots\dots(१)$

अत्र यदि गु < १ तथा 'न' धनात्मिका भवेत्तदा

(१) समीकरणे स. ध. = $\frac{\text{आ} (१ - गु^n)}{१ - गु}$ अत्र न नानं यथा यथाऽ-

धिकं स्यात्तथा गु^n अस्यमानमत्वं स्याद्गुणकस्य रूपाक्षरत्वाद्दत्त एव परमाधि-
 केऽनन्त समे न माने गु^n अस्य मानं परमाक्षरं गृह्यसमं भवत्यतस्त्र स. ध. =
 $\frac{\text{आ} (१ - ०)}{१ - गु} = \frac{\text{आ}}{१ - गु}$ अत उपपन्नम्।

उदाहरण—यदि आदि १, चय ३ और गच्छ अनन्त है, तो उस
 गुणोत्तर श्रेढी का सर्वधन बताओ।

यहाँ सूत्र के अनुसार—स. ध. = $\frac{\text{आ}}{१ - गु} = \frac{१}{१ - ३} = \frac{१}{-२} = \frac{३ \times १}{२} = \frac{३}{२}$ ।

सनादिबृत्तज्ञानाय करणसूत्रं सार्वार्था।

पादाक्षरमितगच्छे गुणवर्गफलं चये द्विगुणे ॥ ७ ॥

समवृत्तानां संख्या तद्वर्गा वर्गवर्गश्च।

स्वस्वपदोनौ स्यातामर्धसमानां च विपमाणाम् ॥ ८ ॥

$$= मे^२ - ६मे^३ + ११मे^३ - ६मे \dots (१)$$

$$= मे^२ - ६मे^३ + ११मे^३ - ६मे + १ - १$$

$$= (मे^३ - ६मे + १)^३ - १$$

$$= (अर्धसमवृत्तभेद - २ समवृत्तभेद + १)^३ - १$$

एतेन—समवृत्तजभेदेन द्विगुणेनेत्यादि विरोपोक्तमुपपद्यते ।

$$\text{अथ त्रि. वृ. भे.} = मे^२ - ६मे^३ + ११मे^३ - ६मे$$

$$= मे^२ - मे^२ - ६मे (मे^३ - २मे + १)$$

$$= \text{भास्करीय त्रि. वृ. भे.} - ६मे (मे - १)^३$$

अनेन—

समवृत्तभवो भेदो निरेकस्तत्कृतिर्हता । समवृत्तजभेदेन रसधनेन तदूनितः ।

भेदः श्रीभास्करोक्तानां विपमाणां भवेद्भुवन् । वृत्तरत्नाङ्करोक्तानामसमानां सदैव हि ॥

इत्युपपद्यते ।

उदाहरणम् ।

समानामर्धतुल्यानां विपमाणां पृथक् पृथक् ।

वृत्तानां वद मे संख्यामनुष्टुपञ्चन्द्रसि द्रुतम् ? ॥ १ ॥

अनुष्टुप् छन्द मे सप्त, अर्धसप्त और विपस वृत्तों के भेद अलग-अलग बताओ ।

न्यासः । उत्तरो द्विगुणः २ । गच्छः ८ । लब्धाः समवृत्तानां संख्याः २५६ । तथाऽर्धसमानां च ६५२८० । विपमाणां च ४२९४९६० ।

इति श्रेढीव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—द्विगुण षय, गच्छ ८, अब 'विपमे गच्छे' इत्यादि सूत्र के अनुसार गुण और वर्ग को न्यास करने पर तथा नीचे से ऊपर की ओर क्रिया करने से गुणवर्गत्र फल = २५६ = समवृत्तभेद । अब समवृत्तभेद का वर्ग तथा वर्ग वर्ग करने से क्रम से ६५२८६ और ४२९४९६०२९६ हुये । इनमें क्रम से अपना अपना वर्गमूल बटाने पर क्रम से अर्ध समवृत्तभेद ६५२८० और विपसवृत्तभेद = ४२९४९६० ।

गच्छ = ८
४ वर्ग २५६
२ वर्ग १६
१ वर्ग ४
० गुणक २

इति श्रेढीव्यवहारः समाप्तः ।

$$(५) (२ \times १) + (३ \times २) + (४ \times ३) + (५ \times ४) + \dots (न + १) न$$

इस श्रेणी को हम निम्नलिखित रूप से लिख सकते हैं—

$$(१^२ + १) + (२^२ + २) + (३^२ + ३) + (४^२ + ४) + \dots$$

$$(न^२ + न)$$

$$= (१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + न^२) + (१ + २ + ३ + ४ + \dots + न)$$

$$= \frac{२ न - १}{६} न + \frac{न + १}{२} = \frac{न (न - १)}{६} + \frac{न + १}{२}$$

$$\{ २ न + १ + १ \}$$

$$= \frac{न (न - १)}{६} \{ २ न + २ \} = \frac{न (न - १) (न - १) २}{६}$$

$$= न (न + १)^२$$

$$(६) १ + ९ + २९ + ६७ + \dots \dots \dots \text{इसका योग करना है।}$$

$$\text{उक्त श्रेणी} = (१^३ + ०) + (२^३ + १) + (३^३ + २) + (४^३ + ३) + \dots$$

$$(न^३ + न - १)$$

$$= (१^३ + २^३ + ३^३ + ४^३ + \dots + न^३) + \{ १ + २ + ३ + \dots$$

$$(न - १) \}$$

$$= \left\{ \frac{न (न - १)}{६} \right\}^२ + \{ २ + ३ + \dots + न \}$$

$$\left\{ \frac{न (न - १)}{६} \right\}^२ + \frac{न^२ - ३ न}{२} \text{ उत्तर}$$

$$(७) १ + ५ + ११ + १९ + २९ + ४१ + \dots \dots \dots + (न^३ + न - १)$$

$$= (१^२ + ०) + (२^२ + १) + (३^२ + २) + (४^२ + ३) + \dots$$

$$(न^३ + न - १)$$

$$= (१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + न^२) + (१ + २ + ३ + \dots + न - १)$$

$$= \frac{२ न - १}{६} न + \frac{न - १}{२} + \frac{न + ३ न}{६} \text{ उत्तर।}$$

$$(८) २ + १२ + ३६ + ८० + \dots \dots \dots + (न^३ + न^३)$$

$$= (१^३ + १^३) + (२^३ + २^३) + (३^३ + ३^३) + (४^३ + ४^३) + \dots$$

$$+ (न^३ + न^३)$$

$$= (१^३ + २^३ + ३^३ + ४^३ + \dots + न^३) + (१^३ + २^३ + ३^३ + \dots + न^३)$$

$$= \left\{ \frac{न (न + १)}{६} \right\}^२ + \frac{२ न + १}{६} न = \frac{न (न + १)}{६} \left\{ \frac{न (न + १)}{६} + \right.$$

$$\left. \frac{(० न + १)}{६} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & 8 + 16 + 24 + 32 + \dots + (n^3 - n^2) \\
 &= (1^3 - 1^2) + (2^3 - 2^2) + (3^3 - 3^2) + (4^3 - 4^2) + \dots + (n^3 - n^2) \\
 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\
 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n-1}{2} \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{3n^2 - 3n - 2n + 2}{2} \right\} = \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{3n^2 - 5n + 2}{2} \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{3n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \right\} = \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{3n(n-1) - 2(n-1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(3n+2)(n-1)}{2} = \frac{n(3n+2)(n-1)}{4} \text{ उत्तर।}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & (-1) + 2 + 15 + 48 + 95 + 158 + \dots + (n^3 - n^2 - n) \\
 &= (1^3 + 1^2 + 1) + (2^3 - 2^2 - 2) + (3^3 - 3^2 - 3) + \dots + (n^3 - n^2 - n) \\
 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{1}{2} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n - \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{2} - 1 \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{3n^2 - 3n - 2n - 2}{2} \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{3n^2 - 5n - 2}{2} \right\} \text{ उत्तर}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & 8 + 16 + 24 + 32 + 40 + \dots + n(n+1)^2 \\
 &= 1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + 4 \times 5^2 + \dots + n(n+1)^2 \\
 &= (2-1)2^2 + (3-1)3^2 + (4-1)4^2 + \dots + (n+1-1)(n+1)^2 \\
 &= (2^3 - 2^2) + (3^3 - 3^2) + (4^3 - 4^2) + \dots + (n+1)^3 - (n+1)^2 \\
 &= \{ 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n+1)^3 \} - \{ 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n+1)^2 \} \\
 &= \{ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n+1)^3 \} - \{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 \} \\
 &= \left\{ \frac{(n+2)(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{1}{2} \frac{(n+2)(n+1)(n+1)}{2} \\
 &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left\{ \frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{(n+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left\{ \frac{3(n+2)(n+1) - 2(n+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left\{ \frac{3(n+2)(n+1) - 2(n+1)}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3(2n+1)n+1}{4} + \frac{10n-1}{4} = \frac{3n(n-1)}{4} \{ 2n+1+4 \} \\
 &= \frac{3n(n+1)}{4} (2n+6) = \frac{3n(n-1)}{4} \times 2 = \\
 &= 3n(n+1)(n+2) \text{ उत्तर।}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1c) & 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\
 &= 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + \left(\frac{2n+1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{4} \right) \\
 &= 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + \left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n - n \right) \\
 &= 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + \left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n + n \right) \\
 &= \left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{3}{4}n \right) + \left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{3}{4}n \right) + \dots \\
 &\quad \left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{3}{4}n \right) \\
 &= \frac{3}{4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + \frac{3}{4} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \\
 &\quad \dots + n^2) + \frac{3}{4} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= \frac{3}{4} \left(\frac{n(n+1)}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3n-1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{4} \\
 &= \frac{3}{4} \left(\frac{n(n+1)}{4} \right) \{ n(n+1) + (2n+1) + 1 \} \\
 &= \frac{3}{4} n(n+1)(n^2 + n + 2n + 1 + 1) \\
 &= \frac{3}{4} n(n+1)(n^2 + 3n + 2) \\
 &= \frac{3}{4} n(n+1) \{ n^2 + 2n + n + 2 \} \\
 &= \frac{3}{4} n(n+1) \{ n(n+2) + (n+2) \} \\
 &= \frac{3}{4} n(n+1)(n+1)(n+2) \\
 &= \frac{3}{4} n(n+1)^2(n+2) \text{ उत्तर।}
 \end{aligned}$$

(1d) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + n$ पद पर्यन्त, इनका योग करना है। मान लिया कि इसका योग = स, और अन्तिम पद = t_n है।

$$\text{अब स} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + t_n \dots \dots (1)$$

$$\text{और स} = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + t_{n-1} + t_n (2)$$

(1) में (2) को घटाने पर

$$\text{स} - \text{स} = (1 - 0) + (4 - 1) + (9 - 4) + \dots + (t_n - t_{n-1}) - t_n$$

$$\text{वा } 0 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n \text{ पर्यन्त} - t_n$$

$$\therefore \text{योग} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \text{ उत्तर।}$$

(२२) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + n$ पर्यन्त
 यहाँ १ला पद = $\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2})$ । २रा पद = $\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ । ३रा पद = $\frac{1}{2} (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$
 अतः अन्तिम पद = $\frac{1}{2} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$$\therefore \text{योग} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + \frac{1}{2} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2} (\frac{2n+1-1}{2n+1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \text{ उत्तर।}$$

(२३) किसी समान्तर श्रेढी के तीन लगातार पदों का योग १८ है, और उनका गुणनफल १६२ तो वे पद बताओ।

मान लिया कि, वे पद क्रम से ($y - r$), y , और ($y + r$) हैं
 तो प्रश्न के अनुसार ($y - r$) + y + ($y + r$) = १८

$$\text{या } 3y = 18$$

$$\therefore y = 6$$

अब तीनों पद क्रम से—($6 - r$), 6 और ($6 + r$) हूये।

$$\therefore (6 - r) \cdot 6 \cdot (6 + r) = 162$$

$$\text{या } (6 - r) (6 + r) = 27$$

$$\text{या } 36 - r^2 = 27, \therefore r^2 = 9, \therefore r = 3$$

$$\therefore \text{अनीष्ट पद} = 3, 6, 9 \text{ उत्तर।}$$

(२४) किसी समान्तर श्रेढी के ५ लगातार पदों का योग ३५ है और उनका वनयोग ३६०५ है, तो वे पद क्या हैं ?

मान लिया कि वे पद क्रम से ($y - 2r$), ($y - r$), y , ($y + r$), ($y + 2r$)

$$\therefore (y - 2r) + (y - r) + y + (y + r) + (y + 2r) = 35$$

$$\text{या } 5y = 35, \therefore y = 7$$

$$\text{किर, } (y - 2r)^2 + (y - r)^2 + y^2 + (y + r)^2 + (y + 2r)^2 = 3605$$

$$\text{या, } y^2 + \{ (y + r)^2 + (y - r)^2 \} + \{ (y + 2r)^2 + (y - 2r)^2 \} = 3605$$

$$\text{या, } y^2 + (2y)^2 - 2(y^2 - r^2) \times 2 + 2y^2 + (2y)^2 - 2(y^2 - 4r^2) \times 2 = 3605$$

$$\text{या, } y^2 + 4y^2 - 4y^2 + 4r^2 + 4y^2 - 4y^2 + 8r^2 = 3605$$

$$\text{या, } 5y^2 + 12r^2 = 3605$$

$$= \frac{50(10^n - 1)}{9 \times 2} - \frac{5n}{2} = \frac{50}{2} (10^n - 1) - \frac{5}{2} n \text{ उत्तर।}$$

(३) ९ + ९९ + ९९९ + ... n पर्यन्त

$$= 9 + 99 + 999 + \dots n \text{ पर्यन्त}$$

$$= [(1 - \frac{1}{10}) + (1 - \frac{1}{10^2}) + (1 - \frac{1}{10^3}) + \dots n \text{ पर्यन्त}]$$

$$= [(1+1+1+1+ \dots n \text{ पर्यन्त}) - (\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots n \text{ पर्यन्त})]$$

$$= \left\{ n - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots n \text{ पर्यन्त} \right) \right\}$$

$$= n - \frac{[1 - (\frac{1}{10})^n]}{1 - \frac{1}{10}} = n - \frac{\frac{1}{10} \times [1 - (\frac{1}{10})^n]}{\frac{9}{10}}$$

$$= n - \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{9} = n - \frac{1}{9} (1 - \frac{1}{10^n}) \text{ उत्तर।}$$

(४) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी में तीन लगातार पदों का योग १४ और उनका गुणन फल ६४ है, तो उन पदों को बताओ।

मान लिया कि वे पद क्रम से y, y.r, y.r²

$$\text{तो प्रश्न के अनुसार—} y + y.r + y.r^2 = 14 \dots (1)$$

$$\text{और } y \times y.r \times y.r^2 = 64 \dots (2)$$

$$\text{अब (1) समीकरण से—} y (1 + r + r^2) = 14$$

$$\therefore y = \frac{14}{1 + r + r^2} \dots (3)$$

(२) समीकरण से y.r² = 64

$$\therefore y.r = 8 \dots (4)$$

$$\text{वा } \frac{14 \times r}{1 + r + r^2} = 8,$$

$$\text{वा } 14r = 8(1 + r + r^2)$$

$$\text{या } 14r = 8 + 8r + 8r^2$$

$$\text{या } 8r^2 - 6r + 8 = 0$$

$$\text{या } 2r^2 - 4r + 2 = 0$$

इष्टो भुजस्तत्कृतिरिष्टभक्ता द्विःस्थापितेष्टोनयुताऽर्धिता वा ।

तौ कोटिकर्णाविति कोटितौ वा बाहुश्रुती चाकरणागते स्तः ॥५॥

इष्टः भुजः करण्यः । अस्मात् द्विगुणैर्निष्ठात् इष्टस्य कृत्या एक वियुक्त्या
आहतं कोटिः भवेत् । सा कोटिः पृथक् इष्ट गुणा, भुजोना कर्गः भवेत् । इदं ज्ञानं
अत्यन्तं ज्ञेयम् । वा—इष्टः भुजः करण्यः, तत्कृतिः इष्टभक्ता द्विःस्थापिता इष्टोन-
युता अर्धिता कार्या, तदा तौ क्रमेण कोटिकर्णौ स्याताम् । वा—कोटितः
अकरणागते बाहुश्रुतीस्तः ।

इस सूत्र में भुज के ज्ञान से कोटि और कर्ग का ज्ञान जानने की रीति
बतलायी गई है । इष्ट भुज को करियन द्विगुणित इष्ट से गुणा कर उसमें रूपोन
इष्ट वर्ग से भाग देने पर लब्धि कोटि होती है और उस कोटि को इष्ट से
गुणा कर गुणन फल में भुज को घटाने से कर्ग होता है । इसे ज्ञानत्रिभुज
समझना चाहिये ।

अथवा—इष्ट भुज के वर्ग में करियन इष्ट से भाग देकर लब्धि को दो
जगह रन्व कर एक में इष्ट घटा कर और दूसरे में इष्ट जोड़ कर आधा करने पर
क्रम से कोटि और कर्ग होते हैं ।

वा—कोटि के ज्ञान से उक्त क्रिया द्वारा अकरणागत भुज और कर्ग होते हैं ।

अत्रोपपत्तिः—अत्र 'कोटिः पृथक् स्वेष्टगुणा भुजोनाकर्गः' भवेदित्या-
लापोक्त्या कर्गः = को × इ - सु

$$\therefore क^2 = को^2 \times इ^2 - २ को \cdot इ \cdot सु + सु^2 = सु^2 + को^2$$

$$\therefore को^2 \times इ^2 - को^2 = सु^2 + २ को \cdot इ \cdot सु - सु^2$$

$$\therefore को^2 (इ^2 - १) = २ को \cdot इ \cdot सु$$

$$\therefore को (इ^2 - १) = २ इ \cdot सु$$

$$\therefore को = \frac{२ इ \cdot सु}{(इ^2 - १)} \quad \text{अथ } सु^2 = क^2 - को^2$$

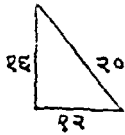
$$= (क + को) (क - को) \quad \text{अत्र यदि } क - को = इ \text{ तदा}$$

$$सु^2 = (क + को) \times इ$$

$$\therefore \frac{सु^2}{इ} = क + को = योग \quad \text{ततः संक्रमणेन—}$$

यदि इष्ट भुज १२ है, तो कोटि और कर्ण के अकरणीगत विविधमान उक्त दोनों रीति से बताओ ।

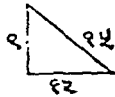
न्यासः ।



इष्टो भुजः १२ । इष्टम् २ । अनेन द्विगु-
रोन ४ गुणितो भुजः ४८ । इष्ट २ कृत्या
४ एकोनया ३ भक्तो लब्धा कोटिः १६ ;

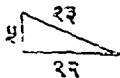
इयन्निष्टगुणा ३२ भुजोना १२ जातः कर्णः २० ।

त्रिकोणोपदेन वा



कोटिः ८ । कर्णः १० ।

पञ्चकेन वा

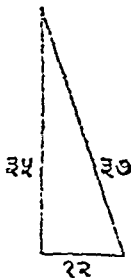


कोटिः ४ । कर्णः १३ ;

इत्यादि ।

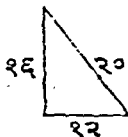
अथ द्वितीयप्रकारेण ।

न्यासः ।



इष्टो भुजः १२ । अस्यकृतिः १३४ । इष्टेन
२ भक्त्वा लब्धम् ७२ । इष्टेन २ ऊन—५०
युता—५४ अधिकतौ जातौ कोटिकर्णौ ३४।३७ ।

चतुष्टयेन वा



कोटिः १६ । कर्णः २० ;

$$\therefore २ इ \times क = को (इ^२ + १) \quad \therefore को = \frac{२ इ \times क}{इ^२ + १} \text{ अत्र उपपन्नम् ।}$$

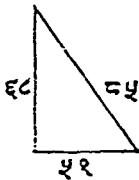
उदाहरणम् ।

पञ्चाशीतिमिते कर्णे यां यावत्करणीगतौ ।

स्यातां क्रोडिभुजौ तौ तौ वद् क्रोविद् सत्वरम् ॥ १ ।

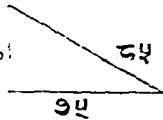
हे क्रोविद् ! जहाँ कर्ण ८५ है वहाँ अकरणीगत अनेक प्रकार के क्रोडि और भुज के मान बताओ ।

न्यासः



कर्णः ८५ । अयं द्विगुणः १७० । द्विकेनेष्टेन हतः ३४० । इष्ट २ कृत्या ४ । सैक्या ५ भक्तो जाता क्रोडिः ६८ । इयमिष्टगुणा १३६ कर्णो- ८५ निता जाता भुजः ५१ ।

चतुःकेनेष्टेन वा ४०।



क्रोडिः ४० । भुजः ५४ ।

उदाहरण—कर्ण = ८५ । यहाँ इष्ट = २ कल्पना क्रिया । अब द्विगुणित कर्ण (८५ × २) = १७० को इष्ट २ से गुणा कर १ युक्त इष्ट के वर्ग से भाग देने पर (१७० × २ ÷ ५) = ६८ क्रोडि हुई । अब इष्ट गुणित क्रोडि और कर्ण का अन्तर करने से (६८ × २ - ८५) = ५१ भुज हुआ । इसी तरह ४ इष्ट से क्रोडि ४० और भुज ५५ होते हैं ।

पुनः प्रकारान्तरेण तत्करणसूत्रं वृत्तम् ।

इष्टवर्गेण सैकेन द्विगुणः कर्णोऽथवा हतः ।

फलोनः श्रवणः क्रोडिः फलमिष्टगुणं भुजः ॥ ७ ॥

अथवा—द्विगुणः कर्णः सैकेन इष्टवर्गेण हतः फलोनः श्रवणः कार्यस्तदा क्रोडिः स्यात् । फलमिष्टगुणं भुजः स्यादिति ।

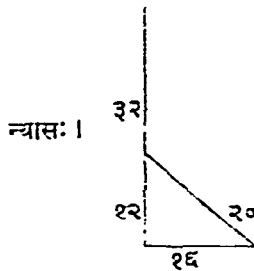
$$\text{कर्णः} = \frac{\text{वं} + \frac{\text{अं} \cdot \text{भु}^2}{\text{वं}}}{२} ।$$

$$\text{कोटिः} = \frac{\text{वं} - \frac{\text{अं} \cdot \text{भु}^2}{\text{वं}}}{२} \text{ अत उपपन्नं सर्वम् ।}$$

उदाहरणम् ।

यदि समभुवि वेणुद्वित्रिपाणिप्रमाणो गणक पवनवेगादेकदेशे स भग्नः ।
भुवि नृपमितहस्तेष्वङ्ग लम्बं तदग्रं कथय कृत्तियु मूलादेशे भग्नः करेषु ॥१॥

हे गणक ! किसी समतल जमीन पर ३२ हाथ ऊँचा एक बाँस लड़ा था ।
हवा के वेग से टूट कर उसका अग्रभाग जड़ से १६ हाथ पर समतल भूमि में
लगा, तो बाँस कितनी ऊँचाई पर से टूटा यह बताओ ।



वंशाग्रमूलान्तरभूमिः १६ । वंशः ३२ ।
कोटिकर्णयुतिः ३२ । भुजः १६ । जाते
ऊर्ध्वावःखण्डे २० । १२ ।

उदाहरण—यहाँ वंश=क + को=३२ । वंशाग्रमूलान्तरभूमि = भुज=१६ ।

अब सूत्र के अनुसार $\frac{\text{भु}^2}{\text{क} + \text{को}} = २५६ \div ३२ = ८$ । अब वंश में घन ऋग करने

पर ३२ + ८ = ४० । ३२ - ८ = २४ । जाघा करने से कर्ण = ४० \div २ = २०

कोटि = २४ \div २ = १२ । इसी तरह अन्यान्य प्रश्नों का उत्तर निकालना चाहिये ।

बाहुकर्णयोगे दृष्टे कोट्यां च ज्ञातानां प्रथमकरणसूत्रं वृत्तम् ।

स्तम्भस्य वर्गोऽहिविलान्तरेण भक्तः फलं व्यालविलान्तरालात् ।

शोष्यं तदर्धप्रमितैः करैः स्याद्विलाग्रतो व्यालकलापियोगः ॥१०॥

स्तम्भस्य वर्गः अहिविलान्तरेण भक्तः फलं व्यालविलान्तरालात् शोष्यं
तदर्धप्रमितैः करैः विलाग्रतः व्यालकलापि योगः स्यादिति ।

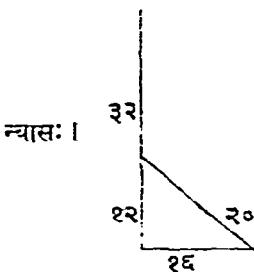
$$\text{कर्णः} = \frac{\text{वं} + \frac{\text{अं} \cdot \text{भु}^2}{\text{वं}}}{२} ।$$

$$\text{कोटिः} = \frac{\text{वं} - \frac{\text{अं} \cdot \text{भु}^2}{\text{वं}}}{२} \text{ अत उपपन्नं सर्वम् ।}$$

उदाहरणम् ।

यदि समभुवि वेणुद्वित्रिपाणिप्रमाणो गणक पवनवेगादेच्छेरो स भग्नः ।
भुवि नृपमितहस्तेष्वङ्ग लग्नं तदग्रं कथय कतेषु मूलादेश भग्नः करेषु ॥१॥

हे गणक ! किसी समतल जमीन पर ३२ हाथ ऊँचा एक बाँस लड़ा या ।
हवा के वेग से टूट कर उसका अग्रभाग जड़ से १३ हाथ पर समतल भूमि में
लगा, तो बाँस कितनी ऊँचाई पर से टूटा यह बताओ ।



वंशाग्रमूलान्तरभूमिः १६ । वंशः ३२।
कोटिकर्णयुतिः ३२ । भुजः १६ । जाते
ऊर्ध्वाधःखण्डे २० । १२ ।

उदाहरण—यहाँ वंश=क + को=३२ । वंशाग्रमूलान्तरभूमि = भुज=१६ ।

अब सूत्र के अनुसार $\frac{\text{भु}^2}{\text{क} + \text{को}} = \frac{२५६}{३२} = ८$ । अब वंश में घन खण्ड करने

पर ३२ + ८ = ४० । ३२ - ८ = २४ । आधा करने से कर्ण = ४० ÷ २ = २०

कोटि = २४ ÷ २ = १२ । इसी तरह अन्यान्य प्रश्नों का उत्तर निकालना चाहिये ।

ब्राह्मण्ययोगे दृष्टे कोट्यां च ज्ञातायां पृथक्करणसूत्रं वृत्तम् ।

स्तम्भस्य वर्गोऽहिविलान्तरेण भक्तः फलं व्यालविलान्तरालात् ।

शोध्यं तदर्धप्रमितैः करैः स्याद्विलाग्रतो व्यालकलापियोगः ॥१०॥

स्तम्भस्य वर्गः अहिविलान्तरेण भक्तः फलं व्यालविलान्तरालात् शोध्यं
तदर्धप्रमितैः करैः विलाग्रतः व्यालकलापि योगः स्यादिति ।

उदाहरण—यहाँ स्तम्भ = कोटि = ९ हाथ । अहिविलान्तर = मु + क = २७ हाथ । अब सूत्र के अनुसार—स्तम्भ ९ का वर्ग ८१ को अहिविलान्तर २७ से भाग देकर लब्धि ३ को अहिविलान्तर २७ में घटा कर आधा करने पर मुज = $(\frac{२७-३}{३}) = १२$ हुआ । अतः बिल से १२ हाथ पर दोनों का योग हुआ । २७ - १२ = १५ = कर्ग ।

कोटिकर्णान्तरे भुजे च दृष्टे पृथक्करणसूत्रं वृत्तम् ।

भुजाद्वर्गितात् कोटिकर्णान्तराप्तं द्विधा कोटिकर्णान्तरेणोनयुक्तम् ।
तदर्थं क्रमात् कोटिकर्णौ भवेतामिदं धीमताऽऽवेद्य सर्वत्र योज्यम् ॥
सखे पद्मतन्मज्जनस्थानमध्यं भुजः कोटिकर्णान्तरं पद्मदृश्यम् ।
नलः कोटिरेतन्मितं स्याद्यदम्भो वदैवं समानीय पानीयमानम् ॥

भुजान् वर्गितात् कोटिकर्णान्तराप्तं द्विधा (स्याप्यम्) कोटिकर्णान्तरेण
उन युक्तं तदर्थं कार्यं । तदा क्रमात् कोटिकर्णौ भवेतां, इदं धीमता आवेद्य
सर्वत्र योज्यम् ॥ १२ ॥

हे सखे, पद्मतन्मज्जनस्थानमध्यं भुजः, पद्मदृश्यं कोटिकर्णान्तरं, नलः कोटिः
एतन्मितं अम्भः स्यात् । एवं पानीयमानं समानीय वद ॥ १३ ॥

भुज के वर्ग में कोटि और कर्ग के अन्तर से भाग देकर लब्धि में एक
जगह कोटिकर्णान्तर घटाकर और दूसरी जगह में जोड़कर आधा करने से क्रम
से कोटि और कर्ग होते हैं । इसे बुद्धिमान् समझ कर सभी जगह योजना करें ।

इस श्लोक से ग्रन्थकार आगे के उदाहरण की चैत्रस्थिति बताते हैं—हे
सखे ! कमल और उसके दूबने की जगह के बीच की दूरी भुज है और कमल
का दृश्यभाग कोटिकर्णान्तर है तथा नाल कोटि है । कोटि के तुर्य ही जल है
अतः जल का प्रमाण बताओ ॥ १३ ॥

उपपत्तिः—अत्र कोटिकर्णान्तरम् = अं ।

तदा मु^२ = क^२ - को^२ = (क + को) (क - को)

∴ (क + को) = $\frac{\text{मु}^2}{\text{क} - \text{को}} = \frac{\text{मु}^2}{\text{अं}}$ । ततः संकननेन

(वृत्र की ऊँचाई) उससे ताल सरोऽन्तर से गुणित ताल (वृत्र) की ऊँचाई में भाग देने पर उड्डियनमान होता है ।

उपपत्तिः—अत्र तालोच्च्रितिः = ता उ . । तालसरोऽन्तरम् = स . अ . ।

उड्डियनमानम् = य ।

ता . उ . + स . अं = य + कर्ण

वा, २ ता . उ + स . अं = ता . उ + य + कर्ण = को + कर्ण परञ्च स . अं =

मु^२ = क^२ - को^२ = (क + को) (क - को)

$$\therefore क - को = \frac{स . अं}{क + को} = \frac{स . अं}{२ ता . उ + स . अं}$$

ततः संक्रमणेन—

$$को = \frac{२ ता . उ + स . अं - \frac{स . अं}{२ ता . उ + स . अं}}{२} = ता . उ + य$$

$$\therefore य = \frac{२ ता . उ + स . अं - \frac{स . अं}{२ ता . उ + स . अं}}{२} - ता . उ$$

$$= \frac{(२ ता . उ + स . अं)^२ - स . अं}{२ (२ ता . उ + स . अं)} - ता . उ$$

$$= \frac{४ ता . उ^२ + ४ ता . उ \times स . अं + स . अं - स . अं}{२ (२ ता . उ + स . अं)} - ता . उ$$

$$= \frac{४ ता . उ^२ + ४ ता . उ \times स . अं}{२ (२ ता . उ + स . अं)} - ता . उ$$

$$= \frac{२ ता . उ^२ + २ ता . उ \times स . अं - ता . उ (२ ता . उ + स . अं)}{२ ता . उ + स . अं}$$

$$= \frac{२ ता . उ^२ + २ ता . उ \times स . अं - २ ता . उ^२ - स . अं \times ता . उ}{२ ता . उ + स . अं}$$

$$= \frac{ता . उ \times स . अं}{२ ता . उ + स . अं} \text{ उपपन्नम्}$$

अथवा क्रोष्टिः = ता . उ + य, मुत्रः = स . अं । अत्र गत्योः सान्यात्—

कर्णः = ता . उ + स . अं - य

$$\therefore कर्ण^२ = (ता . उ + स . अं - य)^२ = (ता . उ + य)^२ + (स . अं)^२$$

विशेष—‘दिनिघ्नतालोच्छ्रितिसंयुतं चतु’ इस सूत्र के अनुसार उर्द्धानमान

$$= \frac{\text{ता. उ.} \times \text{ता. स. अं.}}{२ \text{ ता. उ.} + \text{ता. स. अं.}}$$
 यहाँ=उर्द्धानमान = समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक का एक हिस्सा। ता. उ. = तालोच्छ्रिति = उसी भुजा का शेष भाग। ता स अं = ताल सरोन्तर = समकोण बनाने वाली दूसरी भुजा। अतः इस विशेष उदाहरण से यह सामान्याकरण (Generalisation) होना है कि यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा, तथा कर्ण और दूसरी भुजा के एक टुकड़े का योग मान्य हो, साथ ही यदि वह योग ज्ञात भुजा और अज्ञात भुजा के शेष टुकड़े के योग के बराबर हो, तो कर्ण और अज्ञात भुजा दोनों जाने जा सकते हैं, अन्यथा नहीं।

उदाहरण

किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक ११२ फीट है। यदि उसका कर्ण और दूसरी भुजा के एक टुकड़े का योग १६८ फीट हो और इसी के बराबर यदि पहली भुजा और दूसरी भुजा के शेष टुकड़े का योग हो, तो कर्ण और कोटि अलग-अलग बताओ। समकोण बनाने वाली अज्ञात भुजा का एक टुकड़ा

$$= \frac{\text{अज्ञात भुजा दूसरा टुकड़ा} \times \text{ज्ञात भुजा}}{२ \text{ अज्ञात भु. का दूसरा टुकड़ा} + \text{ज्ञात भुजा}}$$

यहाँ अज्ञात भुजा का दूसरा टुकड़ा = (१६८ - ११२) = ५६ फीट और
 ज्ञात भुजा = ११२ फीट अतः अज्ञात भुजा का पहला टुकड़ा = $\frac{५६ \times ११२}{५६ + ११२}$
 $= \frac{५६ \times ११२}{१६८} = \frac{५६}{३} = २८$ फीट।

∴ क = १६८ - २८ = १४० फीट और अज्ञात भुजा = ५६ + २८ = ८४ फीट।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

- (१) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा ५ फीट है। उसकी दूसरी भुजा दो भागों में इस तरह बाँट दी गई है कि उसका एक हिस्सा और कर्ण का योग दूसरा हिस्सा और ज्ञात भुज के योग के बराबर है। यदि यह योग १५ फीट है, तो कर्ण और अज्ञात भुजा का मान बताओ।
- (२) एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा ७५ इंच है। उसकी दूसरी भुजा को इस तरह दो भागों में बाँट दिया गया है कि एक टुकड़ा और कर्ण

योगो द्विधा मूलविहीनयुक्तः

स्यातां तदर्थं भुजकोटिमाने ॥ १४ ॥

द्विगुणात् कर्णस्य वर्गात् दोः कोटियोगः स्वगुणः विशोध्यः, अस्य मूलं ग्राह्यम् । योगः द्विधामूलविहीनयुक्तः तदर्थं क्रमेण भुजकोटिमाने स्याताम् ।

कर्ण के वर्ग को दो से गुणाकर गुणन फल में भुज और कोटि के योग का वर्ग घटावें । शेष के मूल को योग (भुज कोटि का योग) में एक जगह घटा कर और दूसरी जगह जोड़कर आधा करने पर क्रम से भुज और कोटि होते हैं ।

उपपत्तिः—कल्प्यते भु. + को. = यो., कर्णः = क । तदा यो^२ = (भु+को)^२

$$= भु^२ + को^२ + २ भु \times को = क^२ + २ भु \times को$$

$$\therefore यो^२ = क^२ + २ भु \times को$$

$$\therefore यो^२ + क^२ = २ क^२ + २ भु \times को$$

$$\therefore क^२ - २ भु \times को = २ क^२ - यो^२$$

$$\therefore भु^२ + को^२ - २ भु \times को = २ क^२ - यो^२$$

$$\therefore (को - भु)^२ = २ क^२ - यो^२$$

$$\therefore (को - भु) = \sqrt{२ क^२ - यो^२} = मूल$$

ततः संक्रमणगणितेन—भु = $\frac{यो - मूल}{२}$, को = $\frac{यो + मूल}{२}$ अत उपपन्नम् ।

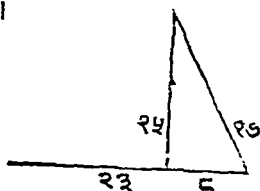
उदाहरणम् ।

दश सप्ताधिकाः कर्णस्त्र्यधिका विशतिः सखे ।

भुजकोटियुतिर्यत्र तत्र ते मे पृथग्वद् ॥ १ ॥

हे मित्र ! जहाँ कर्ण १७ है और भुजकोटि का योग २३ है, वहाँ भुज और कोटि का मान अलग-अलग बताओ ।

यासः ।



कर्णः १७ दोःकोटियोगः २३ ।

जाते भुजकोटी ८ । १५ ।

- (३) एक १०८ फीट ऊँचा ताल का पेंड समतल नूनि में खड़ा था। एक दिन हवा के वेग से कुछ दूर पर से वह वृत्र टूट गया, लेकिन टूटा हुआ हिस्सा वृत्र से विरुद्ध अलग नहीं हुआ बल्कि वह झुक कर वृत्र की जड़ से ३६ फीट की दूरी पर जमीन में लग गया, तो वह वृत्र कितनी ऊँचाई पर से टूटा यह बताओ।
- (४) किसी तालाब में एक कमल खिला था जिसका १ गज पानी की सतह से ऊपर उठा था। हवा के झोंके से धीरे-धीरे चल कर वह कमल उस जगह से ५ गज की दूरी पर डूब गया, तो पानी की गहराई बताओ।
- (५) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं का अन्तर २३ फीट और कर्ण ११५ फीट हैं, तो भुजाओं के मान अलग-अलग बताओ।
- (६) किसी समकोण त्रिभुज का भुजयोग १०८ फीट और उसका कर्ण ४५ फीट हैं, तो समकोण बनाने वाली भुजायें अलग-अलग बताओ।
- (७) किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण ६० फीट है। यदि समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक दूसरे का $\frac{2}{3}$ हो, तो उनकी मान अलग-अलग बताओ।
- (८) एक सीढ़ी की लम्बाई, किसी घर की ऊँचाई के बराबर है। यदि सीढ़ी की जड़ घर से ८ फीट अलग कर देंगे हैं, तो सीढ़ी घर की चौथी से २ फीट नीचे चली जाती है, तो सीढ़ी की ऊँचाई बताओ।
- (९) एक २५ फीट लम्बी सीढ़ी किसी घर के सहारे नीची खड़ी है, तो उसकी जड़ को घर से कितना हटा दें कि उनकी चौथी १ फीट नीची हो जाय।
- (१०) किसी समकोण त्रिभुज का भुजयोग ३६ फीट और उसका कर्ण १५ फीट है, तो उनकी भुजायें अलग-अलग बताओ।

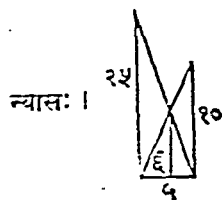
लम्बाववायाज्ञानाय करणमुत्रं वृत्तम् ।

अन्योन्यमूलाग्रामृत्रयोगाद्वेष्वर्षधे योगहतेऽवलम्बः ।

वंशौ स्वयोगेन हृतावभीष्टभूतौ च लम्बोभयतः कुत्तुण्डे ॥१५॥

वेष्वोः वधे योगहते अन्योन्यमूलाग्रामृत्रयोगात् अवलम्बः स्यात् । अभीष्ट-भूतौ वंशौ स्वयोगेन हतौ, लम्बोभयतः कुत्तुण्डे च स्याताम् ।

रस्तियों के योग से भूमि पर लम्ब का मान बनाओ। यहाँ दोनों बाँसों की दूरी अज्ञात है।



वशाँ १५।१०। जातो लम्बः ६। वशान्तरभूः ५। अतो जाते भूखण्डे ३।२। अथवा भूः १०। खण्डे ६।५। वा भूः १०। खण्डे ६।६। वा भूः २०। खण्डे १।५ एवं सर्वत्र लम्बः ६ एव। यद्यत्र भूमितुल्ये भुजे वंशः कोटि-स्वदा भूखण्डेन क्षिति विरैराशिकेन सर्वत्र प्रतीतिः।

उदाहरण—यहाँ बाँस १५ और १० हाथ लम्बे हैं। अब सूत्र के अनुसार दोनों बाँसों के गुणन फल $(१५ \times १०) = १५०$ में, बाँसों के योग $(१५ + १०) = २५$ से भाग देने पर लब्धि ६ लम्ब का मान हुआ। यहाँ यदि इष्ट भूमि ५ हाथ मानें, तो इससे दोनों बाँसों को अलग-अलग गुणा कर बाँसों का योग २५ से भाग देने पर प्रथम आवाधा $= \frac{१५ \times ५}{२५} = ३$ और द्वितीय आवाधा $= \frac{१० \times ५}{२५} = २$ हाथ।

यदि वंशान्तर भूमि १० हो, तो उक्तरीति से दोनों आवाधायें ३ और ७ होंगी। इसी तरह वंशान्तर भूमि १५ एवं २० पर से भी आवाधा लानी चाहिए।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

- (१) दो बिजली के खम्भे की ऊँचाई क्रम से ३० फीट और २४ फीट हैं, तो परस्पर एक की जड़ से दूसरे की चौथी तक गये हुये तारों के योग विन्दु की ऊँचाई बनाओ।
- (२) दो नीतार की ऊँचाई क्रम से ८० गज और ९० गज हैं। यदि उन दोनों के बीच की दूरी ८५ गज हो, तो परस्पर एक की जड़ से दूसरे की चौथी तक गये हुये सूत्रों के योग विन्दु से जमीन पर लम्ब का मान तथा लम्ब के मूल से दोनों नीतार की दूरी बनाओ।
- (३) दो घर की ऊँचाई क्रम से १४ और १६ गज हैं, तो परस्पर एक की जड़ से दूसरे की छत तक गये हुये रस्तियों के योग से जमीन पर लम्ब का मान बनाओ।

भुजप्रमाणा ऋजुशलाका भुजस्थानेषु विन्यस्यानुपपत्तिर्दर्शनीया ।

आवाधादिज्ञानाय करणसूत्रमार्याद्वयम् ।

त्रिभुजे भुजयोर्योगस्तदन्तरगुणो भुवा हतो लब्ध्या ।

द्विष्टा भूरूनयुता दलिताऽऽवाधे तयोः स्याताम् ॥ १७ ॥

स्वावाधाभुजकृत्योरन्तरमूलं प्रजायते लम्बः ।

लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति ॥ १८ ॥

त्रिभुजे भुजयोः योगः तदन्तरगुणः भुवा हतः, भूः द्विष्टा लब्ध्या अनयुता दलिता तयोः आवाधे स्याताम् । स्वावाधाभुजकृत्योः अन्तरमूलं लम्बः प्रजायते । लम्बगुणं भूम्यर्धं त्रिभुजे स्पष्टं फलं भवति ।

त्रिभुज में दो भुज के योग को उनके अन्तर से गुणा कर तीसरी भुजा (भूमि) से भाग देने पर लब्धि जो हो, उसे तीसरी भुजा (भूमि) में एक जगह घटा कर और दूसरी जगह जोड़ कर, दोनों का आधा करने से क्रम से लघु और बृहद् भुज की आवाधा होती है । अपनी आवाधा के वर्ग को अपनी भुजा के वर्ग में घटा कर मूल लेने पर लम्ब होता है । लम्ब को भूमि से गुणा कर उसका आधा करें, तो त्रिभुज का स्पष्ट फल होता है ।

उपपत्तिः—अत्र अ क = प्र. भु., अ ग = द्वि. भु., क ग = भू = तृ. भु., क घ =

अ प्र. आ, ग घ = द्वि. आ, अ घ = लम्बः । अ क घ त्रिभुजे प्र. भु^२ - प्र. आ^२ = लं^२, तथा अ ग घ त्रिभुजे द्वि. भु^२ - द्वि. आ^२ = लं^२,

अतः प्र. भु^२ - प्र. आ^२ = द्वि. भु^२ - द्वि. आ^२

∴ द्वि. भु^२ - प्र. भु^२ = द्वि. आ^२ - प्र. आ^२

∴ (द्वि. भु + प्र. भु) (द्वि. भु - प्र. भु) = (द्वि. आ + प्र. आ) (द्वि. आ - प्र. आ)

∴ (द्वि. भु + प्र. भु) (द्वि. भु - प्र. भु) = भू (द्वि. आ - प्र. आ)

∴ (द्वि. आ - प्र. आ) = $\frac{(द्वि. भु + प्र. भु) (द्वि. भु - प्र. भु)}{भू}$

भू

उदाहरण—उपर्युक्त त्रिभुज में भुजद्वय का योग (१३ + १५) = २८ को उनके अन्तर (१५ - १३) = २ से गुणा करने पर (२८ × २) = ५६ हुआ। इसको भूमि १४ से भाग देने से (५६ ÷ १४) = ४ आया। इसे १४ में क्रम से घटा कर और जोड़ कर आधा करने से प्रथम आधाधा = $\frac{१४-४}{२} = \frac{१०}{२} = ५$ और द्वितीय आधाधा = $\frac{१४+४}{२} = \frac{१८}{२} = ९$ ।

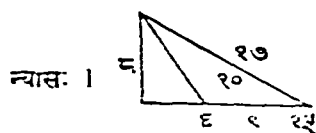
अब प्रथम आधाधा ५ का वर्ग २५ और प्रथम भुज १३ का वर्ग १६९ इन दोनों का अन्तर (१६९ - २५) = १४४ का मूल = १२ लम्ब हुआ। लम्ब १२ से भूमि १४ को गुणा कर दो से भाग देने पर $\frac{१४ \times १२}{२} = ८४$ क्षेत्रफल हुआ।

ऋणात्राघोदाहरणम् ।

दशसप्तदशप्रमौ भुजौ त्रिभुजे यत्र नवप्रमा नही।

अत्रवे वद लम्बकं तथा गणितं गाणितिकागु तत्र मे ॥ २ ॥

जिस त्रिभुज की भुजाएँ क्रम से १० और १७ हैं और आधार ९ है तो आधाधा, लम्ब और क्षेत्रफल बताओ।



भुजौ १० । १७ । भूमिः ६ ।
अत्र त्रिभुजे भुजयोर्वोग इत्यादिना
लम्बम् ८ । अनेन भूतना न
स्यात् । अस्मादेव भूरपनीता

शेषार्धनृणगताऽऽत्राधा दिग्वैपरीत्येनेत्यर्थः । तथा जाते आधावे ६ ।
१४ अत उभयत्रापि जाते लम्बः = फलम् ३६ ।

उदाहरण—१० और १७ भुज हैं। भूमि = ६ है। अब सूत्र के अनुसार दोनों भुज के योग २७ को भुजद्वयान्तर ९ से गुणा कर भूमि ७ से भाग देने पर (२७ × ७ ÷ ९) = २१ लम्बि भूमि में नहीं घटेगी अतः लम्बि में ही भूमि को घटा कर आधा करने से ($\frac{२१-६}{२}$) = ६ पहली आधाधा हुई और दूसरी आधाधा = ($\frac{२१+६}{२}$) = १५। यहाँ पहली आधाधा ६ ऋणात्मिका है। लम्ब लाने के लिये प्रथम भुज १० के वर्ग १०० में प्र. आधाधा ६ का वर्ग घटा कर मूल लेने से - $\sqrt{(१०० - ३६)} = \sqrt{६४} = ८ =$ लम्ब। त्रिभुजफलनयनार्थ लम्ब ८ को भूमि से गुणा किया तो $\frac{१० \times ८}{२} = \frac{८०}{२} = ४० =$ त्रिभुजफल।

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ।

अ
 कल्पना किया कि अ व स एक त्रिभुज है, जिसमें \angle व अ
 $s = 90^\circ$, अतः रेखा गणित से अ व स त्रिभुज का क्षेत्र-



$$\text{फल} = \frac{\text{अ व} \times \text{अ स}}{२}$$

\therefore समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\text{समकोण बनाने वाली भुजाओं का घन}}{२}$
 समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ।

यदि अ व स त्रिभुज में अ व = अ स, तो अ व स एक समद्विबाहु सम-
 कोण त्रिभुज हो जायगा ।

$$\therefore \Delta \text{ अ व स} = \frac{\text{अ व} \times \text{अ स}}{२} = \frac{\text{अ व} \times \text{अ व}}{२} = \frac{\text{अ व}^2}{२}$$

इसमें यह सिद्ध होता है कि समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल
 अक्षर भुजा के वर्ग का आधा होना है ।

उदाहरण ।

१) किसी समकोण त्रिभुज की भुजा ७ फीट है, तो इसकी ऊँचाई और
 क्षेत्रफल बताओ ।

$$\text{ऊँचाई} = \frac{३}{४} \text{ भु} \times \sqrt{३} \text{ । यहाँ भु} = ७ \text{ फीट}$$

$$\therefore \text{ऊँचाई} = \frac{३}{४} \times ७ \times \sqrt{३} = \frac{२१\sqrt{३}}{४} \text{ फीट ।}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{३}}{४} \text{ भु}^2 = \frac{\sqrt{३}}{४} \times ७^2 = \frac{\sqrt{३} \times ४९}{४} \text{ व. फी. ।}$$

(२) किसी समकोण त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु से आधार पर का लम्ब ३ फीट
 २ इंच है, तो इसका क्षेत्रफल बताओ ।

$$\text{लम्ब} = \frac{\sqrt{३}}{४} \text{ भु, } \therefore \text{भु} = \frac{३}{\frac{\sqrt{३}}{४}} \text{ लम्ब । यहाँ लम्ब} = ३ \text{ फी. } २ \text{ इंच}$$

$$= १४ \text{ इंच । } \therefore \text{भु} = \frac{३}{\frac{\sqrt{३}}{४}} \times १४ = \frac{३५}{\sqrt{३}} \text{ इंच ।}$$

$$\text{अब क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{३}}{४} \text{ भु}^2 = \frac{\sqrt{३}}{४} \times \left(\frac{३५}{\sqrt{३}}\right)^2 \text{ व. इ.}$$

$$= \frac{2 \times 1 \times 4 \times 5 \times 2}{2 \times 2} \text{ गज} = 20 \text{ गज।}$$

- (७) एक समकोण त्रिभुज का कर्ण ८५ गज और एक भुजा ३० गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

यहाँ कर्ण = ८५ गज और एक भुजा ३० गज है।

$$\therefore \text{दूसरी भुजा} = \sqrt{85^2 - 30^2} = \sqrt{(85+30)(85-30)} =$$

$$\sqrt{115 \times 55} = \sqrt{25 \times 45 \times 5 \times 11} = \sqrt{25^2 \times 3^2 \times 11} = 25 \times 3 = 75 \text{ गज।}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = \frac{30 \times 75}{2} = 20 \times 75 = 1500 \text{ व० गज।}$$

- (८) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजा ५ गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{अर्थात् क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ भुजा}^2 = \frac{1}{2} \times 5^2 = \frac{25}{2} \text{ वर्ग गज}$$

$$= \frac{25}{2} \text{ व० फी०} = 1 \text{ व० फी० } 12 \frac{1}{2} \text{ वर्ग इंच।}$$

- (९) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल १८ वर्ग गज है, तो उसकी समकोण बनानेवाली भुजाएँ बताओ। समकोण बनानेवाली भुजाओं में से प्रत्येक = $\sqrt{2 \text{ क्षेत्रफल}} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6 \text{ गज।}$

- (१०) किसी त्रिभुज का लम्ब ४ फीट २ इंच और उसका आधार १ फीट ३ इंच हैं, तो क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{लम्ब} = 4 \text{ फी० } 2 \text{ इंच} = 40 \text{ इंच। आधार} = 1 \text{ फी० } 3 \text{ इंच} = 13 \text{ इंच}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = \frac{\text{लम्ब} \times \text{आ}}{2} = \frac{40 \times 13}{2} = 20 \times 13 = 260 \text{ व० इंच।}$$

- (११) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल २ एकड़ और उसका आधार १२३६ गज हैं, तो उसकी ऊँचाई बताओ।

$$\text{ऊँचाई (लम्ब)} = \frac{2 \text{ क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{2 \times 2 \times 2640}{1236} \text{ गज}$$

$$= \frac{10560}{1236} = 10 \text{ गज।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न।

- (१) एक समभुज त्रिभुज की भुजा १८ फीट है, तो उसकी ऊँचाई बताओ।
 (२) तीन गाँव इस तरह बसे हुये हैं कि एक दूसरे के बीच की दूरी

चतुर्भुजत्रिभुजयोरस्पष्टस्पष्टफलानयने करणसूत्रं वृत्तम् ।
 सर्वदोर्युतिदलं चतुःस्थितं त्राहुभिर्विरहितं च तद्वधात् ।
 मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेवमुदितं त्रिवाहुके ॥१९॥

सर्वदोः युतिदलं चतुः स्थितं त्राहुभिः विरहितं च तद्वधात् मूलं चतुर्भुजे स्फुटफलं स्यात्, त्रिवाहुके पत्रं स्पष्टं उदितम् ।

त्रिभुज या चतुर्भुज के सभी भुजाओं के योगार्थ को चार जगहों में रखकर उनमें क्रम से प्रत्येक भुजा को घटाकर जो शेष बचे उन सबों के गुणन फल का मूल लेने से त्रिभुज में वास्तव और चतुर्भुज में अवास्तव फल होता है ।

उपपत्तिः—अ क ग त्रिभुजे अ क=लघुभुजः, अ ग=वृहद्भुजः, क ग=भूमिः

अ क व = लघ्वावाधा, अ व=लम्बः ततः । त्रिभुजे भुजयोर्योगः

$$\text{इत्यादिना क व} = \frac{\text{क ग}^2 - (\text{अ ग}^2 - \text{अ क}^2)}{२ \text{ क ग}}$$

$$\text{अ क}^2 - \text{क व}^2 = \text{अ व}^2 = \text{अ क}^2 - \left\{ \frac{\text{क ग}^2 - (\text{अ ग}^2 - \text{अ क}^2)}{२ \text{ क ग}} \right\}^2$$

क व ग परस्परवर्गान्तरस्य योगान्तरं घातसमन्वितं अ व

$$= \left\{ \text{अ क} + \frac{\text{क ग}^2 - (\text{अ ग}^2 - \text{अ क}^2)}{२ \text{ क ग}} \right\} \left\{ \text{अ क} - \frac{\text{क ग}^2 - (\text{अ ग}^2 - \text{अ क}^2)}{२ \text{ क ग}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{२ \text{ अ क} \times \text{क ग} + \text{क ग}^2 + \text{अ क}^2 - \text{अ ग}^2}{२ \text{ क ग}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{२ \text{ अ क} \times \text{क ग} - \text{क ग}^2 + \text{अ ग}^2 - \text{अ क}^2}{२ \text{ क ग}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(\text{अ क} + \text{क ग})^2 - \text{अ ग}^2}{४ \text{ क ग}} \right\} \left\{ \frac{\text{अ ग}^2 - (\text{अ क} - \text{क ग})^2}{४ \text{ क ग}} \right\}$$

$$= \frac{(\text{अ क} + \text{क ग} + \text{अ ग})(\text{अ क} + \text{क ग} - \text{अ ग})(\text{अ ग} + \text{अ क} - \text{क ग})(\text{अ ग} + \text{क ग} - \text{अ क})}{४ \text{ क ग}^2}$$

अयं लम्बवर्गो भूम्यर्धवर्गगुणस्तदा फलवर्गः =

$$\frac{(\text{अ क} + \text{क ग} + \text{अ ग})(\text{अ ग} + \text{क ग} - \text{अ ग})(\text{अ ग} + \text{अ क} - \text{क ग})(\text{अ ग} + \text{क ग} - \text{अ क}) \times \text{क ग}^2}{४ \text{ क ग}^2}$$

(१) (२) सर्माकरणयोयोगः

$$१६ च.फ. + (अक^२ + कग^२ - अघ^२ - गघ^२)^२ = ४ अक^२ \times कग^२ + ४ अघ^२ \times गघ^२ - ८ अक \times कग \times अघ \times गघ \quad (\text{कोज्या } \angle \text{अकग} \times \text{कोज्या } \angle \text{अघग} - \text{ज्या } \angle \text{अकग} \times \text{ज्या } \angle \text{अघग})$$

$$= ४ अक^२ \times कग^२ + ४ अघ^२ \times गघ^२ - ८ अक \times कग \times अघ \times गघ \times \text{कोज्या} (\angle क + \angle घ) \quad | \text{अत्र यदि } \angle क + \angle घ = म, \text{ तदा}$$

$$१६ च.फ. + (अक^२ + कग^२ - अघ^२ - गघ^२)^२ = ४ (अक^२ \times कग^२ + अघ^२ \times गघ^२) - ८ अक \times कग \times अघ \times गघ \times \text{कोज्या} म$$

$$= ४ (अक^२ \times कग^२ + अघ^२ \times गघ^२) - ८ अक \times कग \times अघ \times गघ \quad (\text{२ कोज्या}^२ \frac{३}{४} म - १)$$

$$= ४ (अक \times कग + अघ \times गघ)^२ - १६ अक \times कग \times अघ \times गघ \times \text{कोज्या}^२ \frac{३}{४} म$$

$$\therefore १६ च.फ. = ४ (अक \times कग + अघ \times गघ)^२ - (अक^२ + कग^२ - अघ^२ - गघ^२)^२ - १६ अक \times कग \times अघ \times गघ \times \text{कोज्या}^२ \frac{३}{४} म$$

$$= (अक^२ + कग^२ - अघ^२ - गघ^२ + २ अक \times कग + २ अघ \times गघ) (अघ^२ + गघ^२ - अक^२ - कग^२ + २ अक \times कग + २ अघ \times गघ) - १६ अक \times कग \times अघ \times गघ \times \text{कोज्या}^२ \frac{३}{४} म$$

$$= \{ (अक + कग)^२ - (अघ - गघ)^२ \} \{ (अघ + गघ)^२ - (अक - कग)^२ \} - १६ अक \times कग \times अघ \times गघ \times \text{कोज्या}^२ \frac{३}{४} म$$

$$= (अक + कग + अघ - गघ) (अक + कग + गघ - अघ) (अघ + गघ + अक - कग) (अघ + गघ + कग - अक) - १६ अक \times कग \times अघ \times गघ \times \text{कोज्या}^२ \frac{३}{४} म$$

$$\text{अत्र यदि } अक + कग + गघ + अघ = यो, \therefore अक + कग + अघ - गघ = यो - २ गघ$$

$$अक + कग + गघ - अघ = यो - २ अघ, \quad अघ + गघ + अक - कग = यो - २ कग, \quad अघ + गघ + कग - अक = यो - २ अक,$$

$$\therefore १६ च.फ. = (यो - २ गघ) (यो - २ अघ) (यो - २ कग) (यो - २ अक) - १६ सुजघात \times \text{कोज्या}^२ \frac{३}{४} म$$

क्रम से प्रत्येक भुजा को घटाने से शेष क्रम से १५, १२, १० और ११ हुये। इनका घात $15 \times 12 \times 10 \times 11 = 19800$ का मूल १४१ से कुछ कम होता है। यह स्थूल क्षेत्रफल हुआ। इसका वास्तव फल 'लम्बेन निम्नं कुमुत्सैक्यन्त्रण्डम्' इस सूत्र से होगा। जैसे—भूमि १४ और मुख ९ का योगार्ध $\frac{9+14}{2}$ को लम्ब १२ से गुणा करने पर $\frac{9+14}{2} \times 12 = 126$ हुआ। इस सूत्र से त्रिभुज का फल वास्तव होता है, यह मूल में स्पष्ट है।

अथ स्थूलत्वनिरूपणार्थं सूत्रं सार्धवृत्तम्।

चतुर्भुजस्यानियतौ हि कर्णौ कथं ततोऽस्मिन्नियतं फलं स्यात्।
प्रसाधितौ तच्छ्रवणौ यदाद्यैः स्वकल्पितौ तावितरत्र न स्तः ॥

तेष्वेव बाहुष्वपरो च कर्णावनेकथा क्षेत्रफलं ततश्च।

यस्मिन् चतुर्भुजे कर्णौ अनिश्चितौ भवेतां तत्र फलमपि अनिश्चितं स्यात्। आद्यैः स्वकल्पितौ यन् श्रवणौ प्रसाधितौ तौ इतरत्र न स्तः। यतः तेषु पत्र बाहुषु अपरो कर्णौ भवेतां ततः क्षेत्रफलञ्च अनेकथा भवति।

अनिश्चित कर्ण वाले चतुर्भुज का फल निश्चित कैसे हो सकता है। आद्या-चार्यों ने स्वकल्पित कर्णों का साधन जो किया है, वे सब जगह नहीं हो सकते, क्यों कि उन्हीं भुजाओं पर से अनेक कर्ण और अनेक प्रकार के फल होते हैं। इस स्थिति को ग्रन्थकार नीचे मूल में स्पष्ट करने हैं।

चतुर्भुजे हि एकान्तरकोणावाकन्याऽन्तः प्रवेश्यमानौ भुजौ तत्संसक्तं स्वकर्णं सद्बोधयतः। इतरौ तु बहिः प्रसरन्तौ स्वकर्णं वर्धयतः। अत उक्त तेष्वेव बाहुष्वपरो च कर्णाधिात।

चतुर्भुज में सामने के दो कोणों को पकड़ कर भीतर की ओर दवाने से उनमें लगे हुये दोनों भुज भीतर की ओर घुसते हैं, जिससे उन कोणों में लगा हुआ कर्ण छोटा होता है, और शेष दो भुज बाहर की ओर फैलते हुये अपने कर्ण को बढ़ाते हैं इसलिये कहा गया है कि उन्हीं भुजाओं पर से अनेक कर्ण और अनेक क्षेत्रफल होते हैं।

परिशिष्ट।

किसी समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजा का मान 'अ' -

$$= \sqrt{42 \times 22 \times 32 \times 32} = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 320 \text{ वर्ग गज।}$$

अब सबसे बड़ी भुजा ५६ गज है अतः उस पर सामने के कोण से लम्ब

$$= \frac{2 \text{ क्षेत्र}}{भु} = \frac{2 \times 320}{56} = 11.4 \text{ गज।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न।

त्रिभुजों के क्षेत्रफल बताओ, जिनकी भुजायें निम्न लिखित हैं।

- (१) ४, ६ और ८ फीट, (२) २५, २५ और ३४ गज, (३) ३८, ८३ और ९० गज, (४) १०, १० और १६ इंच, (५) २ फीट २ इंच, २ फीट १ इंच और १ फीट ५ इंच।
- (६) किसी त्रिभुज की भुजायें ६८, ७५ और ७७ फीट हैं, तो ६८ फीट वाली भुजा के ऊपर सामने के कोण से लम्ब का मान बताओ।
- (७) किसी त्रिभुज की दो भुजायें ८५ गज और १५४ गज हैं। यदि उसका भुज योग ३२४ गज हो, तो क्षेत्रफल बताओ।
- (८) एक त्रिभुज की भुजायें क्रम से १७ गज, १७ गज १ फीट और १७ गज २ फीट हैं, तो १७ गज १ फीट वाली भुजा के ऊपर सामने के कोण से खींचे गये लम्ब का मान बताओ।
- (९) किसी त्रिभुजाकार खेत की भुजायें क्रम से १४३ गज, १०७ गज और १४० गज हैं, तो प्रति वर्ग गज १० शिलिङ्ग की दर से उसका लगान बताओ।
- (१०) एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ जिसकी बराबर भुजायें १५ फीट और आधार १८ फीट हैं।
- (११) किसी त्रिभुज की भुजायें क्रम से ३५, ३९ और ५६ गज हैं, तो उन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बताओ, जो ५६ गज वाली भुजा के ऊपर सामने के कोण से लम्ब करने पर बनते हैं।

विशेष—'सर्वं दोषुनिदलं चतुःस्थितं' इस सूत्र के अनुसार त्रिभुज तथा वृत्तान्तगत चतुर्भुज का क्षेत्रफल बाल्म्व आता है, अन्य चतुर्भुज का इस सूत्र से स्पष्ट फल आता है, यह उपपत्ति से स्पष्ट है, अतः वृत्तान्तगत चतुर्भुज के क्षेत्रफल के कुछ उदाहरण दिखलाने हैं।

- (४) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से ४५, ४८ ५० और ५३ इञ्च हैं, तो उसका चेत्रफल बताओ ।
- (५) एक वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से ४०, ५०, ६० और ७० गज हैं, तो उसका चेत्रफल बताओ ।
- (६) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से २०, २५, ३० और ३५ हैं, तो उसका चेत्रफल बताओ ।

लम्बयोः कर्णयोर्वैकमनिदिश्यापरं कथम् ।

पृच्छत्यनियतत्वेऽपि नियतं चापि तत्फलम् ॥

स प्रच्छकः पिशाचो वा वक्ता वा नितरां ततः ।

यो न वेत्ति चतुर्बाहुक्षेत्रस्यानियतां स्थितिम् ॥

दोनों लम्ब में से एक को या दोनों कर्ण में से एक को नहीं कहकर चेत्र की अनिश्चित स्थिति में भी जो उसका निश्चित फल पृच्छना है, वह पृच्छने वाला मूर्ख है और उस पृच्छने वाले से भी उत्तर देने वाला अधिक मूर्ख है, जो चतुर्भुज की अनिश्चित स्थिति को नहीं जानना है ।

समचतुर्भुजायतयोः फलानयने करणसूत्रं सार्धश्लोकद्वयम् ।

इष्टा श्रुतिस्तुल्यचतुर्भुजस्य कल्प्याऽथ तद्दर्गविवर्जिता या ॥२१॥

चतुर्गुणा बाहुकृतिस्तदीयं मूलं द्वितीयश्रवणप्रमाणम् ।

अतुल्यकर्णाभिहतिद्विभक्ता फलं स्फुटं तुल्यचतुर्भुजे स्यात् ॥२२॥

समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे च तथाऽऽयते तद्भुजकोटिवातः ।

चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलम्बे लम्बेन निम्नं कुमुत्सैक्यखण्डम् ॥२३॥

तुल्यचतुर्भुजस्य इष्टा श्रुतिः कल्प्या, अथ तद्दर्गविवर्जिता या चतुर्गुणा बाहुकृतिः तदीयं मूलं द्वितीयश्रवणप्रमाणं भवेत् । अतुल्यकर्णाभिहतिः द्विभक्ता तुल्यचतुर्भुजे स्फुटं फलं स्यात् । समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे तथा आयते च तद्भुज-कोटिवातः फलं स्यात् । अन्यत्र समानलम्बे चतुर्भुजे कुमुत्सैक्यखण्डं लम्बेन निम्नं फलं स्यात् ।

अत्रोद्देशकः ॥

क्षेत्रस्य पञ्चकृतितुल्यचतुर्भुजस्य कर्णो ततश्च गणितं गणक प्रचक्ष्व ।
तुल्यश्रुतेश्च खलु तस्य तथाऽऽयतस्य यद्विस्तृती रसमिताऽष्टमितश्च दैर्घ्यम् ॥

जिस विषमकोण समचतुर्भुज की भुजा २५ है, उसका दोनों कर्ण और क्षेत्रफल बताओ, एवं उक्त भुजवाले वर्गक्षेत्र और जिस आयत के भुज ६ और कोटि ८ हैं, उसका क्षेत्रफल बताओ ।

प्रथमोदाहरण—

न्यासः । भुजाः २५ । २५ । २५ । २५ । अत्र त्रिशन्मितानेकां ३०
श्रुतिं प्रकल्प्य यद्योक्तकरणेन जाताऽन्या श्रुतिः ४० । फलञ्च ६०० ।

अथवा ।

न्यासः । चतुर्देशमितानेकां १४ श्रुतिं प्रकल्प्योक्तवत्करणेन जाताऽ-
न्या श्रुतिः ४० । फलञ्च ३३६ ।

द्वितीयोदाहरण—

तत्कृत्योर्योगपट्टं कर्ण इति जाता करणीगता श्रुतिरभयत्र तुल्यैव
१२५० । गणितश्च ६२५ ।

अथायतस्य—

न्यासः । विस्तृतिः ६ । दैर्घ्यम् ८ । अस्य गणितं ४८ ।

उदाहरण—उक्त विषमकोण समचतुर्भुज का एक कर्ण ३० कल्पना कर
उसके वर्ग ९०० को चतुर्गुणित भुजवर्ग (४×२५^२) = $४ \times ६२५ = २५००$
में घटाकर शेष ($२५०० - ९००$) = १६०० का मूल ४० दूसरा कर्ण हुआ ।
अब दोनों कर्णों के घात का आधा करने पर $\frac{३० \times ४०}{२} = ६००$ क्षेत्रफल हुआ ।
इसी तरह १४ एक कर्ण का मान कल्पनाकर उक्त रीति से दूसरा कर्ण ४०
और फल ३३६ होता है । २५ भुजवाले वर्गक्षेत्र का कर्ण जानने के लिये दो
भुजाओं का वर्गयोग का मूल लेने से $= \sqrt{२५^२ + २५^२} = \sqrt{६२५ + ६२५} = \sqrt{१२५०}$
 $२५\sqrt{२}$ कर्ण हुआ । अब भुजकोटि का घात करने से $२५ \times २५ = ६२५$
क्षेत्रफल हुआ । इसी तरह आयत का फल = $६ \times ८ = ४८$ क्षेत्रफल हुआ ।

उदाहरणम् ।

क्षेत्रस्य यस्य वदन् मदनारितुल्यं

विश्वम्भरा द्विगुणितेन मुखेन तुल्या ।

तीसरे जाल्यत्रिभुज की सुजायें १२।१६।२० हैं। इन तीनों दुकड़ों के त्रैत्रफलों का योग $\frac{4 \times 12}{2} + 12 \times 6 + \frac{12 \times 16}{2} = 20 + 72 + 96 = 192 =$ सम-लम्ब चतुर्भुज का फल।

अथान्यदुदाहरणम् ।

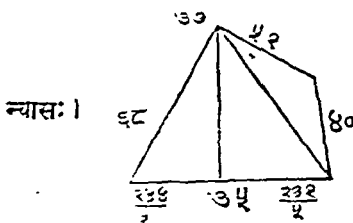
पञ्चाशदेकसहिता वदनं यदीयं

भूः पञ्चसप्तविनिता प्रमितोऽष्टपट्टया ।

सव्यो भुजो द्विगुणविंशतिसन्मितोऽन्य-

स्तस्मिन् फलं श्रवणलम्बनिती प्रचक्ष ॥ ३ ॥

जिस चतुर्भुज का सुव ५३ भूमि ७५ एवं प्रथम भुज ६८ और द्वितीय भुज ४० हैं, तो उसका त्रैत्रफल, कर्ण और लम्ब के मान बताओ। यहाँ लम्ब और कर्ण दोनों अज्ञान हैं, अतः इसका फल निश्चित नहीं होगा। दोनों में किसी एक का मान करवाना कर दूसरा निकाला जा सकता है, जो आगे स्वयं ग्रन्थकार दिखलाये हैं।



वदनम् ५३ । भूमिः ७५ ।
भुजौ ६८ । ४० ।

अत्र फलावलम्बश्रुतीनां सूत्रं वृत्तार्द्धम् ।

ज्ञातेऽवलम्बे श्रवणः श्रुतौ तु लम्बः फलं स्यान्नियतं तु तत्र ।

कर्णस्यानियतत्वाल्लम्बोऽप्यनियत इत्यर्थः ॥

लम्ब के ज्ञान रहने पर कर्ण नाप्यन होता है, एवं कर्ण के ज्ञान से लम्ब का ज्ञान होता है, और वहाँ फल भी निश्चित होता है।

लम्बज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्द्धम् ।

चतुर्भुजान्तद्विभुजेऽवलम्बः प्राग्बहुजौ कर्णभुजौ मही भूः ॥२४॥

तीसरे ज्ञानत्रिभुज की मुजायें १२१, ६१२० हैं। इन तीनों दुकड़ों के क्षेत्रफलों का योग $\frac{12 \times 12}{2} + 12 \times 6 + \frac{12 \times 12}{2} = 36 + 72 + 72 = 180 =$ सम-लम्ब चतुर्भुज का फल।

अथान्यदुदाहरणम्।

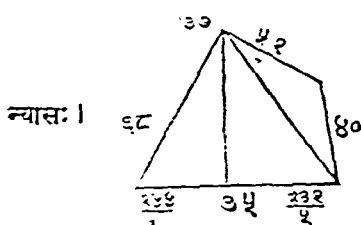
पञ्चाशदेकसहिता वदनं यदीयं

भूः पञ्चसप्रतिमिता प्रमितोऽष्टयष्टया।

सव्यो भुजो द्विगुणविंशतिसन्मितोऽन्य-

स्तस्मिन् फलं श्रवणलम्बमिती प्रचक्ष ॥ ३ ॥

जिस चतुर्भुज का लम्ब ५१ भूमि ७५ एवं प्रथम भुज ६८ और द्वितीय भुज ४० हैं, तो उसका क्षेत्रफल, कर्ण और लम्ब के मान बनाओ। यहाँ लम्ब और कर्ण दोनों अज्ञान हैं, इनका फल निश्चित नहीं होगा। दोनों में किसी एक का मान करके दूसरा निकाला जा सकता है, जो ज्ञान स्वयं ग्रन्थकार दिखलाये हैं।



वदनम् ५१। भूमिः ७५।
भुजौ ६८। ४०।

अत्र फलावलम्बश्रुतीनां सूत्रं वृत्ताद्धम्।

ज्ञातेऽवलम्बे श्रवणः श्रुतौ तु लम्बः फलं स्यान्नियतं तु तत्र।

कर्णस्यानियतत्वाल्लम्बोऽप्यनियत इत्यर्थः ॥

लम्ब के ज्ञान रहने पर कर्ण मालूम होता है, एवं कर्ण के ज्ञान से लम्ब का ज्ञान होता है, और वहाँ फल भी निश्चित होता है।

लम्बज्ञानाय करणसूत्रं वृत्ताद्धम्।

चतुर्भुजान्तत्रिभुजेऽवलम्बः प्राग्बहुजौ कर्णभुजौ मही भूः ॥२४॥

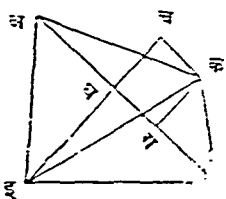
द्वितीयकर्णज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तद्वयम् ।

इष्टोऽत्र कर्णः प्रथमं प्रकल्प्यस्व्यस्त्रे तु कर्णोभयतः स्थिते ये ।
 कर्णं तयोः क्षामितरौ च वाहू प्रकल्प्य लम्बावयवे च साध्ये ॥
 आवाययोरेकककुप्स्ययोर्यत् स्यादन्तरं तत्कृतिसंयुतस्य ।
 लम्बैक्यवर्गस्य पदं द्वितीयः कर्णो भवेत्सर्वचतुर्भुजेषु ॥ २७ ॥

अत्र प्रथमम् इष्टः कर्णः प्रकल्प्यः तु कर्णोभयतः स्थिते ये व्यस्त्रे तयोः कर्णं क्षाम्य, इतरौ च वाहू प्रकल्प्य लम्बावयवे च साध्ये । एकककुप्स्ययोः आवाययोः अन्तरं यत् स्यात् तत्कृतिसंयुतस्य लम्बैक्यवर्गस्य पदं सर्वचतुर्भुजेषु द्वितीयः कर्णः भवेत् ।

चतुर्भुज में (कोई कर्ण ज्ञात हो, तो उसके या कर्ण ज्ञात न हो, तो) इष्ट कर्ण कल्पना कर उसके दोनों तरफ के त्रिभुजों में कर्ण को भूमि और उसके आश्रित भुजों को भुज मान कर 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस सूत्र से लम्ब और आवाया के मान जानना चाहिये । एक तरफ की आवायाओं के अन्तरवर्ग में दोनों लम्ब के योग के वर्ग को जोड़ कर मूल लेने पर सभी चतुर्भुज में दूसरा कर्ण होता है ।

उपपत्तिः—अत्र अ इ उ क चतुर्भुजे अ उ कर्णकल्पनेन अइउ, अकउ त्रिभु-
 जयोः पूर्वोक्तरीत्या लम्बावयवे साध्ये । अ उ कर्णोपरि इ क विन्दुन्यां क्रमेण

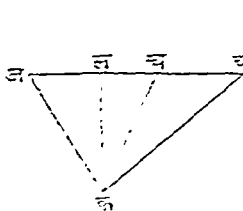


इ अ-क ग लम्बौ प्रथमद्वितीयाख्यौ । इ अ रेखा व
 दिशि संवर्ष्यं तदुपरि क विन्दोः क च लम्बः
 कार्यस्तेन क ग=व च, ∴ इ अ + व च=द्वि. ल +
 प्र. ल । अ ग - अ ब=व ग=च क=एकद्विजस्या-
 वाधान्तरम् । ∴ इ क = $\sqrt{\text{इ अ}^2 + \text{क च}^2}$
 $= \sqrt{\text{लं. वर्ग} + \text{जा. वर्ग}} = \text{द्वि. कर्ण अत}$
 उपपद्यते ।

अन्य लम्ब से छोटा न हो। अन्यकार के उदाहरण और इसी तरह के अन्य उदाहरण में (जहाँ दोनों कर्ण परस्पर लम्ब हों), लम्ब से इष्ट कर्ण को बड़ा होना ठीक है, किन्तु अन्य जगहों में इष्ट कर्ण का मान अन्य कर्ण से अल्प नहीं होना चाहिये। अन्यकार के उदाहरण में लम्ब और कर्ण एक ही है, अतः 'तदन्यलम्बाद्य लघुः' यह पाठ ठीक है। अन्य उदाहरण में 'तदन्यकर्णाद्य लघुः' ऐसा पाठ मनझना चाहिये। 'तदन्यलम्बाद्य लघुः' इसकी पुष्टि अन्यकार ने की है जो नीचे स्पष्ट है।

चतुर्भुजे हि एकान्तरकोणावाक्यस्य सङ्कोच्यमानं त्रिभुजत्वं याति तत्रैककोणलघुलघुमुजयोरैक्यं भूमिमितरी भुजौ प्रकल्प्य साधितः स च लम्बादूनः सङ्कोच्य मानः कर्णः कथञ्चिदपि न स्यात्। तद्वितरो भूनेरधिको न स्यादेवमुभयथाऽपि बुद्धिमता ज्ञायते।

उपपत्तिः—अथ यदि विषमचतुर्भुजस्यैकान्तरकोणावाक्यते नदा त्रिभुजत्वं स्यात्तेनोक्तचतुर्भुजं त्रिभुजाकारं जातं यथा—अ क घ त्रिभुजं, यत्र



संयुक्तकर्णः = क च, अन्यलम्बः = क ल। अत्र,

अन्यकर्णज्ञानाय 'त्रिभुजे मुजयोगोऽंगः' इत्या-

दिना अल इत्याद्यां प्रसाध्य ततः अ च - अ

ल = ल च = मुजः, क ल = लम्बः = कोटिः।

∴ $\sqrt{\text{क ल}^2 + \text{ल च}^2} = \text{क च} = \text{अन्य कर्णः।}$

अथमनिलघुस्तेन क च तौऽधिकं कर्णमानं चतुर्भुजत्वं स्यात्। अत्र यदि कल तौऽधिकं

नया क च तौऽस्यं यात्रकर्णमानं कल्प्यते तावन् अ क घ त्रिभुजत्वंनेव,

अत एव तदन्यकर्णाद्य लघुरिति पाठः साधुः। परञ्च भास्करोक्तंदाह-

रणे लम्बकर्णयोरभेददर्शनात्तदन्यलम्बाद्य लघुरित्यपि पाठः सतीर्त्तितः। अथ

त्रिभुजे मुजद्वययोगस्य तृतीयभुजादधिकत्वाद्दुमद्वययोगरूपाया उभ्याम्तृतीय-

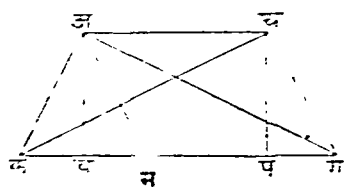
भुजल्यः कर्णः कथमपि नहाद्य नवेदत उपपन्नं सवेत्।

विषमचतुर्भुजफलानयनाय करणमुत्रं वृत्ताद्विम्।

स्थिते तु कर्णाभयतः स्थिते ये

तयोः फलैक्यं फलमत्र नूनम् ॥ २९ ॥

उपपत्तिः—कल्प्यते अ क ग व चतुर्भुजे अ च व प लम्बौ समौ, तेन अ व क ग रेखे समानान्तरे । अतः क ग - अ व = क ग - च प = क च + प ग,



तेन अ च रेखोपरि व प रेखां संयोज्य स्थापनेन अ क च, व प ग त्रिभुज-योयोराल्पे अकम त्रिभुजे अक, प ग भुजौ चतुर्भुजस्य भुजतुल्या तया अ च लम्बोऽपि तदन्व एव, क च, प ग

आवाधे, अतः क ग - क च = च ग, $\sqrt{च ग^2 + अ च^2} = अ ग = प्रकर्णः ।$
 एवं क ग - प ग = क प । $\sqrt{क प^2 + व प^2} = क व = द्विः कः, एतेनावाध-योना चतुरस्रभूमिरित्याद्युपपन्नम् ।$

अथ व ग समानान्तरा अ विन्दोः अ न रेखा कार्या । $\therefore अ च < अ क,$
 $अ म = व ग$ तथा $अ व = न प । अ म + क न = अ क, वा व ग + क न > अ क$
 पक्षयोः अ व संयोजनेन, $व ग + क न + अ व > अ क + अ व,$
 वा $व ग + क न + न ग > अ क + अ व ।$

$\therefore व ग + क ग > अ क + अ व, \therefore लः सु + भूमि > अः सु + सुत्र$
 अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

द्विपञ्चाशन्मितव्येकचत्वारिंशन्मिती भुजौ ।

मुखं तु पञ्चविंशत्या तुल्यं पट्ट्या नही क्लि ॥ १ ॥

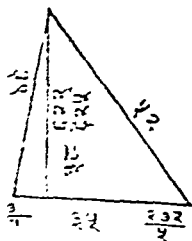
अतुल्यलम्बकं क्षेत्रमिदं पूर्वददाद्गतम् ।

पट्पञ्चाशत् त्रिपष्टिश्च नियते कर्णयोर्मिती ।

कर्णौ तत्रापरो ब्रूहि समलम्बं च तच्छ्रुती ॥ २ ॥

यिस चतुर्भुज नै प्रथम भुज = ५२, द्वितीय भुज = ३९ सुत्र = २५ और भूमि = ६० हैं । इसके निश्चित कर्ण मान ५६ और ६३ हैं, तो अन्य कर्णों के मान बनाओ । इस क्षेत्र को पूर्वाचार्यों ने अनुल्य लम्बक क्षेत्र कहा है । यदि यह चतुर्भुज समलम्बक हो, तो लम्ब और दोनों कर्ण बतानो ।

न्यासः ।



अत्रावाधे जाते ३ । $\frac{३५३}{३}$ ।
 लन्वश्च करणीगतो जातः $\frac{३६०१३}{३}$ ।
 आसन्नमूलकरणेन जातः $३२\frac{३३३}{३}$ ।
 अयं तत्र चतुर्भुजे समलन्वः ।
 लब्धाऽवायोनितमूनेः समलन्वस्य
 च वर्गयोगः ५०४६ अयं कर्णवर्गः ।
 एवं बृहदात्रावाधो द्वितीयकर्णवर्गः

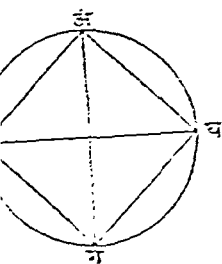
२१७६ । अनयोरासन्नमूलकरणेन जातौ कर्णौ ७१ $\frac{३३}{३}$ । ४६ $\frac{३३}{३}$ । एवं
 चतुरस्रे तेष्वेव बाहुष्वन्यौ कर्णौ बृहदा भवतः ।

उदाहरण—उक्त चतुर्भुज में दोनों भुज ३९ और ५२ हैं । भुज २५ और
 भूमि ६० हैं । यहाँ बड़े कर्ण ६३ को इष्ट कर्ण और उस कर्ण में लगी हुई
 भुजायें ५२ और २५ को भुज मान कर 'त्रिभुजे भुजयोयोगः' इस सूत्र के
 अनुसार प्रथम आवाधा १५, द्वितीयावाधा ४८ और लन्व २० हुए । इसी
 तरह ३९ और ६० भुजों को भुज मान कर उक्त रीति से दोनों आवाधायें
 १५।४८ और लन्व = ३६ हुए ।

अब एक दिशा की दोनों आवाधाओं का अन्तर गून्थ के वर्ग में लन्वैक्य
 (२० + ३६) वर्ग = ५६^२ जोड़ कर मूल लेने से ५६ दूसरा कर्ण हुआ ।

अब ५६ के स्थान में ३२ कर्ण को भूमि और २५ तथा ३९ को भुज
 मान कर उक्त रीति से आवाधायें २ और ३० हुईं । इन पर से लन्व $\sqrt{६२३}$
 हुआ । इसका वास्तव मूल नहीं आता है, अतः २५ महान् इष्ट मान कर
 'वर्गेण महतेष्टेन' इस सूत्र के अनुसार ६२३ के महान् इष्ट के वर्ग ६२५ से
 गुणा करने पर ३८८३२५ हुआ । इसके मूल ६२३ को गुण पद से गुणित छेद
 $२५ \times ३ = ७५$ में भाग देने पर $६२३ \div २५ = २४\frac{३३}{२५}$ हुआ । इसी तरह
 ५२ और ६० भुज पर से लन्व वर्ग २००० हुआ । इसका आसन्न मूल उक्त
 रीति से $४४\frac{३३}{३}$ हुआ । यहाँ एक दिशा की आवाधाओं का अन्तर गून्थ है,
 अतः दोनों लन्वों का योग ($२४\frac{३३}{३} + ४४\frac{३३}{३}$) = $७६\frac{३३}{३}$ = दूसरा कर्ण हुआ ।

$\angle \alpha = 180^\circ - \angle \beta$ । \therefore कोज्या $\alpha =$ कोज्या $(180^\circ - \beta)$ वा



कोज्या $\alpha = -$ कोज्या β , [कोणोत्तरकोणद्वयस्य कोटिज्यायास्तत्कोणकोटिज्याया ऋणगतया समत्वात्] परञ्च 'सुत्रवर्गश्रुतिर्नूनिवर्गानां सुत्रवर्गान्तरम्'। इति त्रिसुत्रस्यान्तकोटिज्या सुत्रसंयुताविति सरल त्रिकोणमित्या यदि क $\beta = \phi$ तदा कोज्या α

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \phi^2}{2\alpha\beta}, \text{ एवं कोज्या } \beta = \frac{\beta^2 + \phi^2 - \alpha^2}{2\beta\phi}$$

$$\therefore \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \phi^2}{2\alpha\beta} = - \frac{\beta^2 + \phi^2 - \alpha^2}{2\beta\phi}$$

$$\therefore 2\beta\phi(\alpha^2 + \beta^2 - \phi^2) = -2\alpha\beta(\beta^2 + \phi^2 - \alpha^2)$$

$$\therefore \alpha \cdot \phi\alpha + \beta \cdot \phi\alpha - \phi^2\phi = -\beta^2\alpha - \phi^2\alpha + \alpha^2\alpha$$

$$\therefore \phi^2\alpha + \phi^2\phi = \alpha \cdot \phi\alpha + \beta \cdot \phi\alpha + \beta^2\alpha + \phi^2\alpha$$

$$\therefore \phi^2(\alpha + \phi) = \alpha\phi(\alpha + \phi) + \alpha\beta(\phi + \alpha)$$

$$\therefore \phi^2(\alpha + \phi) = (\alpha\phi + \alpha\beta)(\alpha + \phi)$$

$$\therefore \phi^2 = \frac{(\alpha\phi + \alpha\beta)(\alpha + \phi)}{\alpha\phi + \phi\alpha}$$

$$\therefore \phi = \sqrt{\frac{(\alpha\phi + \alpha\beta)(\alpha + \phi)}{\alpha\phi + \phi\alpha}} = \text{प्रथमं कर्गः ।}$$

$$\text{एवमेव द्वितीयं कर्गं } \alpha\beta = \sqrt{\frac{(\alpha\phi + \phi\alpha)(\alpha\phi + \phi\alpha)}{\alpha\phi + \phi\alpha}}$$

परस्मैवं वृत्तान्तगतस्यैव चतुर्भुजस्य कर्गानां भवतीति स्फुटं विभावनीयम् ।

अथ उपपत्तम् ।

लघुप्रक्रियादर्शनद्वारेणाह—

अभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः

परस्परं कर्णहता भुजा इति ।

चतुर्भुजं यद्विषमं प्रकल्पितं

श्रुती तु तत्र त्रिभुजद्वयात्ततः ॥ ३२ ॥

बाह्योवधः कोटिर्बधेन युक् स्या-

देका श्रुतिः कोटिभुजावधैक्यम् ।

अन्या लघौ सत्यपि साधनेऽस्मिन्

पूर्वैः कृतं यद्गुरु तन्न विद्यः ॥ ३३ ॥

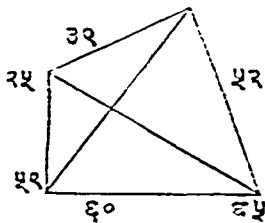
अभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः परस्परं कर्णहतास्तदा (विषम चतुर्भुजे) भुजा भवन्ति । चतुर्भुजं विषमं यत् प्रकल्पितं तत्र त्रिभुजद्वयात् श्रुती भवतः । ततः बाह्योः वधः कोटिबधेन युक् एका श्रुतिः स्यात् । कोटिभुजावधैक्यं अन्या श्रुतिः स्यात् । एवं लघौ साधने सत्यपि अस्मिन् पूर्वैः यत् गुरु कृतं तत् न विद्यः ।

इच्छानुसार दो जात्य त्रिभुज बना कर उनमें एक के कर्ण से दूसरे के भुज और कोटि को तथा दूसरे के कर्ण से प्रथम के भुज और कोटि को गुणा करें तो विषम चतुर्भुज के चारों भुज हो जायेंगे । उन चतुर्भुज के कर्ण भी एक त्रिभुजद्वय से जाने जाने हैं, जैसे—दोनों त्रिभुज के भुजद्वय के बान में कोटिद्वय के बान को जोड़ने पर एक कर्ण होता है । एक त्रिभुज की कोटि को दूसरे त्रिभुज के भुज से तथा दूसरे त्रिभुज की कोटि को प्रथम त्रिभुज के भुज से गुणा कर दोनों को जोड़ने से दूसरा कर्ण होता है । ग्रन्थकार कहते हैं कि इस तरह की सरल रीति रहने पर भी पूर्वाचार्यों ने जो गौरव-प्रकार कहा इसका कारण ज्ञात नहीं होता ।

उपपत्ति.—कल्प्यते प्रथमजात्यत्रिभुजस्य भुजकोटिकर्णाः क्रमेण सु, को, क तथा द्वितीयस्य भुजः = सु', कोटि = को', कर्णः = क' । अथ कस्यापि जात्यत्रिभुजस्येष्टगुणितभुजादिबन्धेन नदन्यं जात्यत्रिभुजमुत्पद्यते तत्रप्रथम-जात्यत्रिभुजस्य साजात्यमिति चैत्रमिच्छा स्पष्टमतः प्रथमजात्यस्य भुजकोटिभ्यां

अथ यदि पार्श्वभुजयोर्व्यत्ययं कृत्वा न्यस्तं त्रैभुजम् ।

न्यासः ।



तदा जात्यद्वयकर्णयोर्वधः
६५ द्वितीयकर्णः ।

उदाहरण

प्रथम त्रिभुज के भुजकोटि कर्ण ३, ४, ५ और द्वितीय त्रिभुज के भुजकोटिकर्ण ५, १२, १३ हैं। अब भुज के अनुसार प्रथम त्रिभुजके कर्ण से द्वितीय त्रिभुज के भुज और कोटि को नया द्वितीय त्रिभुज के कर्ण से प्रथम त्रिभुज के भुज और कोटि को गुणा करने से विषम चतुर्भुज के चारों भुज क्रम से २५, ६०, ५२ और ३९ हुए। अब दोनों त्रिभुजों के भुजों के वात (३ × ५ =) १५ में कोटियों के घात (४ × १२ =) ४८ को जोड़ने से (१५ + ४८ =) ६३ एक कर्ण हुआ। अब प्रथम त्रिभुज की कोटि ४ को द्वितीय त्रिभुज के भुज ५ से गुणा करने पर २० हुआ। इसमें प्रथम त्रिभुज के भुज और द्वितीय त्रिभुज की कोटि का वात ३ × १२ = ३६ को जोड़ने पर २० + ३६ = ५६ दूसरा कर्ण हुआ।

परिशिष्ट

विषमकोण समचतुर्भुज उस समानान्तर चतुर्भुज को कहते हैं जिसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं, लेकिन वर्गचतुर्भुज की तरह इसका प्रत्येक कोण समकोण नहीं होता है। इसका कर्ण एक दूसरे को समकोण बिन्दु पर दो बराबर भागों में बाँटना है। अब उपरि के द्वारा यह स्पष्ट है कि विषमकोण

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = दोनों कर्णों के गुणनफल का आधा = $\frac{क \times क'}{२}$ (१)

नया भुज = $\sqrt{\frac{क^२ + क'^२}{२}}$ (२) । लम्ब (ऊँचाई) = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{भुजा}}$ (३)

- (३) एक विपनकोण समचतुर्भुज के कर्णों क्रम से ८ इञ्च और १६ इञ्च हैं, तो उसकी भुजा और क्षेत्रफल बताओ ।
- (४) किसी विपनकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ६२५ वर्ग गज है । यदि उसका एक कर्ण दूसरे कर्ण का आधा हो, तो उसकी भुजा ऊँचाई और कर्ण की लम्बाई बताओ ।
- (५) एक विपनकोण समचतुर्भुजाकार चट्टाई का क्षेत्रफल ८ व ३० ग ० है । यदि उसका भुजयोग ३६ गज हो, तो उसकी लम्बरूप चौड़ाई बताओ ।
- (६) किसी विपनकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल २३६०० वर्ग फीट है । यदि उसका एक कर्ण १८० फीट है, तो उसका दूसरा कर्ण, भुजा और ऊँचाई का मान बताओ ।
- (७) एक विपनकोण समचतुर्भुज की भुजा २० गज है । यदि उसका छोटा कर्ण बड़े कर्ण का $\frac{2}{3}$ है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

वर्ग और आयत का क्षेत्रफल

हम लोग यह जानते हैं कि वर्ग वह समानान्तर चतुर्भुज है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर और सभी कोण समकोण होते हैं । आयत में भी सभी कोण समकोण होते हैं, किन्तु उनकी सामने की भुजाएँ ही बराबर और समानान्तर होती हैं । रेखागणित में यह स्पष्ट है कि वर्ग और आयत के दोनों कर्ण बराबर होते हैं, अतः भान्द्राचार्य ने वर्ग का नाम समधुति तुल्य चतुर्भुज, विपनकोण समचतुर्भुज का नाम तुल्य चतुर्भुज तथा आयत का नाम आयत ही रखा है । आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई... (१) चूँकि वर्ग की लम्बाई और चौड़ाई बराबर होती हैं, अतः वर्ग का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = लम्बाई^२ = चौड़ाई^२ = भु^२..... (२) ∴ आयत की लम्बाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$ ।

तथा चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}}$ । और वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$ ।

उदाहरण

- (१) किसी वर्ग की भुजा २ गज २ फीट ३ इञ्च है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई। यहाँ लम्बाई = २ चौड़ाई

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = २ \text{ चौड़ाई} \times \text{चौड़ाई} = २ \text{ चौड़ाई}^2$$

लेकिन क्षेत्रफल = ४६०८ व. इ.। $\therefore २ \text{ चौड़ाई}^2 = ४६०८ \text{ व. इ.}$

$$\therefore \text{चौड़ाई}^2 = २३०४ \text{ व. इ.} \quad \therefore \text{चौड़ाई} = \sqrt{२३०४} = ४८ \text{ इंच} \\ = ४ \text{ फीट।}$$

नोट:—इस तरह के प्रश्न में चौड़ाई से लम्बाई जितनी गुनी हो उतने से क्षेत्रफल में भाग देकर उसका वर्गमूल लेना चाहिये, तो चौड़ाई निकल जाती है।

(८) एक आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ५० गज २ फीट और ३२ गज ३ फुट हैं, तो ८ आने प्रति वर्ग गज की दर से उसमें घास लगाने में कितना खर्च लगेगा।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई। यहाँ लम्बाई = ५० गज २ फीट = १५२ फीट, और चौड़ाई ३२ गज ३ फुट = ९७ फीट

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = १५२ \times ९७ \text{ व. फी.} = \frac{१५२ \times ९७}{२} \text{ व. ग.} = \frac{१४६५६}{२} \text{ व. ग.}$$

$$\text{अब ८ आने प्रतिवर्ग गज की दर से घास लगाने का खर्च} = \frac{१४६५६ \times ८}{२} \text{ आने} \\ = \frac{५८६२०८}{२} \text{ रु०} = २९३१०४ \text{ रु०} = ८१९ \text{ रु० ३ आ० १३ पा०।}$$

(९) एक आयताकार उद्यान का क्षेत्रफल २४०० वर्ग गज है, तो उसमें विद्याने के लिये २ फीट लम्बे और ३ फुट चौड़े पत्थर के टुकड़े कितने लगेंगे।

आयत का क्षेत्रफल = २४०० व. ग.। पत्थर के एक टुकड़े का क्षेत्रफल = २ × ३ व. फी. = ६ व. फी. = $\frac{३}{२}$ व. ग.।

$$\therefore २४०० \div \frac{३}{२} = \frac{२४०० \times २}{३} = १६०० \times २ = ३२००० \text{ टुकड़े लगेंगे।}$$

(१०) किसी कोठरी की लम्बाई ३५ फीट और चौड़ाई २४ फीट है, तो ५ सि० ४ पे० प्रति गज की दर से उसमें ३ गज चौड़ी दरी विद्याने का खर्च बताओ।

कोठरी का क्षेत्रफल = ३५ × २४ व. फी. = ८४० व. फी.। लेकिन

दरी का क्षेत्रफल = कोठरी का क्षेत्रफल = ८४० व. फी.। दरी की

चौड़ाई = ३ गज = ३ फीट। \therefore दरी की लम्बाई = ८४० \div ३ = २८०

फीट = २८० \div ३ = ९३ $\frac{१}{३}$ गज। \therefore दरी विद्याने का खर्च = (५ सि०

- (३) किसी आयत की लम्बाई ८५ इंच और चौड़ाई ३० इंच है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (४) एक वर्ग की भुजा ५ गज २ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (५) किसी वर्ग की भुजा २५ फीट ३ इंच है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (६) किसी वर्ग की भुजा ४४० गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (७) एक आयत का क्षेत्रफल १८ व० ग० ३ व० फी० है। यदि उसकी लम्बाई १५ फीट हो, तो उसकी चौड़ाई बताओ।
- (८) किसी आयत का क्षेत्रफल २६ व० ग० ४ व० फी० है। यदि उसकी चौड़ाई १४ फीट हो, तो उसकी लम्बाई बताओ।
- (९) एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल २० एकड़ है। यदि उसकी लम्बाई ९६८ गज हो, तो उसकी चौड़ाई बताओ।
- (१०) किसी आयताकार मैदान का क्षेत्रफल ३६ एकड़ है। यदि उसकी चौड़ाई २८८ गज हो, तो उसकी लम्बाई बताओ।
- (११) एक वर्ग का क्षेत्रफल ४८४ वर्ग गज है, तो उसकी भुजा बताओ।
- (१२) किसी वर्ग का क्षेत्रफल ३ व० ग० १ व० फु० ६४ व० इ० है, तो उसकी भुजा बताओ।
- (१३) किसी वर्ग का क्षेत्रफल १० एकड़ है, तो उसकी भुजा बताओ।
- (१४) किसी वर्ग का क्षेत्रफल ६२५० एकड़ है, तो उसकी भुजा बताओ।
- (१५) किसी आयत का भुजयोग ३३ फीट है। यदि इसकी लम्बाई चौड़ाई से दूनी हो, तो क्षेत्रफल बताइये।
- (१६) किसी आयत का क्षेत्रफल १ व० ग० ६ व० फी० ६ व० इ० है। यदि उसकी लम्बाई-चौड़ाई का ३ हो, तो लम्बाई और चौड़ाई अलग-अलग बताओ।
- (१७) किसी आयताकार खेत की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १५० फी० ३ इंच और ४५ फी० ६ इंच है, तो इसके बराबर क्षेत्रफल वाले दूसरे खेत की चौड़ाई बताओ यदि उसकी लम्बाई ४५० फीट ९ इंच हो।
- (१८) एक वर्ग का क्षेत्रफल ६७६ व० फी० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

- (३०) एक आयताकार घर की लम्बाई ८५'३ फीट और चौड़ाई ४०'५ फीट है, तो उसकी सतह पर विद्याने के लिये ३'५ फीट चौड़ी चटाई की लम्बाई बताओ । यदि प्रति वर्ग गज चटाई विद्याने में २ ह० १० आ० ८ पा० हो, तो सब खर्च कितना लगेगा ।
- (३१) एक आयताकार बरामदे की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ४२ फीट और १५ फीट है, तो उसे १८ इञ्च मुजावाले बर्गाकार पत्थर के टुकड़ों से मढ़ने में कितना खर्च लगेगा यदि प्रत्येक टुकड़े का मूल्य १२ आना हो ।
- (३२) किसी कोठरी की लम्बाई १९ फी० ७ इञ्च और चौड़ाई १८ फीट ९ इञ्च है, तो उसके भीतर विद्याने के लिये कितनी लम्बी दूरी की आवश्यकता होगी, यदि दूरी की चौड़ाई २५ इञ्च है ।
- (३३) एक बर्गाकार कोठरी की मुजा ९ फी० ४ इ० है । इसमें विद्याने के लिये २ फीट ४ इञ्च चौड़ी चटाई की लम्बाई और २ आ० ३ पा० प्रति गज की दर से उसका खर्च बताओ ।
- (३४) किसी बर्गाकार कोठरी की मुजा २४ गज है । यदि इसमें दूरी विद्याने का खर्च १६ पा० लगता है, तो प्रति व० ग० इसी दर से एक आयताकार कोठरी में, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १८ गज और १५ गज हैं, कितना खर्च लगेगा ।
- (३५) किसी कोठरी की लम्बाई १७ फी० ६ इञ्च और चौड़ाई १२ फी० है । यदि उसमें दूरी विद्याने का खर्च ४ पा० १ दि० ८ पे० लगता है, तो उसी दर से २३ फी० ३ इञ्च लम्बी और १६ फी० चौड़ी कोठरी में दूरी विद्याने का खर्च बताओ ।
- (३६) एक कोठरी की लम्बाई २१ फी० ९ इञ्च और चौड़ाई १८ फी० ८ इञ्च है, तो एक आयताकार दूरी, जिसकी लम्बाई १७ फी० १ इञ्च और चौड़ाई १६ फी० ११ इञ्च है, उस कोठरी की सतह को कितना ढँकेगी ।
- (३७) किसी आयताकार कोठरी की लम्बाई ८ गज और चौड़ाई ६ गज है ।

१६ फी० लंब और १० $\frac{१}{२}$ फी० हैं। इसमें ६ फी० ऊँची और ४ फी० चौड़ी दो खिड़कियाँ, ७ फी० ऊँचा, ४ फी० चौड़ा १ दरवाजा और ४ फी० ऊँची तथा ३ $\frac{३}{४}$ फी० चौड़ी एक चिमनी है, तो दीवार के क्षेत्र भागों में २ फी० ३ इंच चौड़े कितने कागज लगेंगे।

(४२) किसी कोठरी की लम्बाई २२ फी० ७ इंच, चौड़ाई १७ फी० ५ इंच और ऊँचाई १३ फी० ३ इंच हैं। उसमें १० फी० ६ इंच ऊँचा और ४ फी० चौड़ा एक दरवाजा, ९ फी० ४ इंच ऊँची और ५ फी० ३ इंच चौड़ी दो खिड़कियाँ और दो चिमनियाँ हैं जिनका क्षेत्रफल क्रम से २० व० फी० और २७ व० फी० हैं, तो दीवार के क्षेत्र भागों में लगाने के लिये कितने कागज की आवश्यकता होगी, यदि उसकी चौड़ाई २ फी० ३ इंच हो।

(४५) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से २५ फी० ७ इ०, २० फी० ५ इ० और १४ फी० हैं। इसकी दीवारों में ३ सि० ६ पें० प्रति वर्ग गज की दर से कागज लगवाया गया है, तथा इसकी छत को १ सि० २ पें० प्रति वर्ग फुट की दर से रंगा गया है तो सब खर्च कितना लगा यह बताओ।

(४६) किसी कोठरी की चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से १६ फी० और १२ फी० हैं। उसकी सतह में ३ आना प्रति वर्ग गज की दर से चटाई बिछाने का खर्च ७ रु० ९ आ० ४ पाई लगता है, तो उसी दर से दीवारों में कागज लगवाने का खर्च बताओ, यदि दीवारों में ६ दरवाजे हों और प्रत्येक दरवाजे का क्षेत्रफल १८ व० फी० हो।

(४७) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से १८ फी० १२ फी० और ११ फी० हैं, तो इसकी चारों दीवारों और छत में लगवाने के लिये कितने लम्बे कागज की आवश्यकता होगी, यदि कागज की चौड़ाई १ गज हो।

(४८) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से १५ फी०, १० फी० ९ इंच और ९ फी० हैं। यदि इसकी चारों दीवारों में $\frac{३}{४}$ गज चौड़ा कागज लगवाने का खर्च प्रति गज ८ $\frac{३}{४}$ पें० होता है,

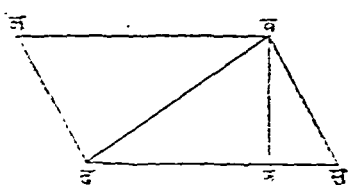
हैं, तो उसमें कितने छात्र बैठ सकते हैं, यदि प्रत्येक छात्र के लिये ४ फी० लम्बी और ३० इंच चौड़ी बगह की आवश्यकता हो।

- (५७) तीन वर्गों की भुजायें क्रम से ५, ६ और ८ फी० हैं, तो उस वर्ग की भुजा बताओ, जो इन वर्गों के योग से ५ गुणा है।
- (५८) एक आयताकार मैदान की लम्बाई उसकी चौड़ाई से तीन गुणी है। उसके भीतर विद्याने के लिये २०२८ पत्थर के टुकड़े लगते हैं। यदि प्रत्येक टुकड़े का क्षेत्रफल १ $\frac{३}{४}$ वर्ग फी० हो, तो मैदान की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।
- (५९) एक टिकट की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से $3\frac{३}{४}$ इंच और $1\frac{३}{४}$ इंच हैं, तो एक पुस्तक को ढँकने के लिये कितने टिकटों की आवश्यकता होगी, यदि पुस्तक की लम्बाई १ फु० ११ इंच और चौड़ाई १ फु० है।
- (६०) किसी वर्गाचा में विद्याने के लिये १५३९ पत्थर के टुकड़ों की आवश्यकता होती है। यदि प्रत्येक टुकड़े का क्षेत्रफल ३६ वर्ग इंच हो, तो उस वर्गाचा से ७ गुणा एक दूसरे वर्गाचा में विद्याने के लिये ९ इंच लम्बा और ४ $\frac{३}{४}$ इंच चौड़ा कितन इँटों की आवश्यकता होगी।

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

समानान्तर चतुर्भुज चार भुजाओं से बिरों हुये उस क्षेत्र को कहते हैं, जिसकी आग्ने सामने की भुजायें बराबर एवं समानान्तर होती हैं, और ऊर्गे रेखा उसको दो बराबर हिस्सों में बाँटती है, यह रेखा गणित से स्पष्ट है। मान

लिया कि अ व स द एक समानान्तर चतुर्भुज है, जिसका ऊर्ग द व और लम्ब व क है। \therefore अ व स द समानान्तर चतुर्भुज को द व ऊर्ग दो बराबर भागों में बाँटता है, \therefore अ व स द चतुर्भुज का क्षेत्रफल = २ Δ व



$$स द = \frac{२ \times व क \times द स}{२} = व क \times द स$$

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार \times लम्ब = $(\frac{3}{2} \times 2)$ व. फी.
 = $\frac{3}{2} \times 2$ व. फी. = ३ व. फी. ।

(२) किसी समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल २ एकड़ और उसका आधार २२२ गज है, तो उसकी ऊँचाई बताओ ।

$$\begin{aligned} \text{समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई} &= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{2 \times 2620}{222} \text{ गज} \\ &= 20 \text{ गज} । \end{aligned}$$

(३) किसी समानान्तर चतुर्भुज का एक कर्ण ८ फी० ३ इंच और उस कर्ण पर सानने के कोण से लम्ब की लम्बाई ४ फी० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = कर्ण \times उस कर्ण पर सानने के कोण से लम्ब = $(8\frac{3}{4} \times 4)$ व० फी० = $\frac{35}{4} \times 4$ व० फी० = ३५ व० फी०

(४) एक समानान्तर चतुर्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल ३ एकड़ और उसका एक कर्ण ८८० गज है तो उस कर्ण पर सानने के कोण से लम्ब का मान बताओ ।

$$\begin{aligned} \text{लम्ब की लम्बाई} &= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{कर्ण}} = \frac{3 \times 2620}{880} \text{ व० ग०} = \frac{33}{2} \text{ व० ग०} \\ &= 16 \text{ व० ग० } 2 \text{ व० फी० } 32 \text{ व० इ० ।} \end{aligned}$$

(५) किसी समानान्तर चतुर्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल ६ एकड़ है। यदि इसके एक कर्ण पर सानने के किसी कोण से लम्ब का मान २४ गज हो, तो उस कर्ण की लम्बाई बताओ ।

$$\begin{aligned} \text{कर्ण} &= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{सानने के कोण से उस कर्ण पर लंब}} = \frac{6 \times 2620}{24} \text{ गज} । \\ &= 660 \text{ गज} । \end{aligned}$$

(६) अ व स द समानान्तर चतुर्भुज की अ व और व स भुजायें क्रम से १५ गज और १४ गज हैं। यदि अ स कर्ण १३ गज हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल =

$$2 \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)$$

उदाहरण ।

(१) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें ९ गज और ५ गज हैं ।

यदि उसकी ऊँचाई १२ गज हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ऊँचाई \times समानान्तर भुजाओं का

योग = $\frac{1}{2} \times 12 \times (9 + 5)$ व. ग. = 6×14 व. ग. = ८४ व. ग. ।

(२) एक समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाओं का योग ३०० गज है ।

यदि उसका क्षेत्रफल १२०० व. ग. है तो समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी बताओ ।

$$\begin{aligned} \text{समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी} &= \frac{2 \text{ क्षेत्रफल}}{\text{समानान्तर भुजाओं का योग}} \\ &= \frac{2 \times 1200}{300} \text{ गज} = 8 \text{ गज} । \end{aligned}$$

(३) किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल १०६ व० फी० और समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी ११ फी० है । यदि समानान्तर भुजाओं का अन्तर ४ फी० हो, तो उनका मान अलग अलग बताओ ।

$$\text{समानान्तर भुजाओं का योग} = \frac{2 \text{ क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}} = \frac{2 \times 106}{11} \text{ फी०} = 38 \text{ फी०} ।$$

\therefore दोनों भुजाओं का अन्तर = ४ फी० है,

\therefore बड़ी भुजा = $\frac{38 + 4}{2} = 21$ फी० और छोटी भुजा = $\frac{38 - 4}{2} = 17$ फी०

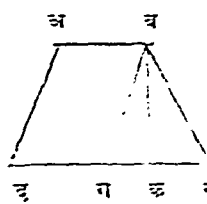
(४) एक समलम्ब चतुर्भुज की निरखी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा १८ फी० है । यदि उसकी समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी १२ फी० हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

रेखा गणित से यह स्पष्ट है कि समलम्ब चतुर्भुज में निरखी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा समानान्तर भुजाओं के योगार्ध के बराबर होती है । यहाँ इस नियम के अनुसार समानान्तर भुजाओं का योगार्ध = १८ फी०,

$$\begin{aligned} \therefore \text{अर्थात् समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} &= 12 \times 18 \text{ व० फी०} = \\ &= 216 \text{ व० फी०} । \end{aligned}$$

(५) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें १२ और १० फी० हैं ।

यदि निरखी भुजाओं में से एक, समानान्तर भुजाओं के ऊपर लम्ब हो



मान लिया कि अब स द एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें अब = ३० फीट, दस = ४४ फीट, अद = १३ फीट और बस = १५ फीट। ब बिन्दु से अ द के समानान्तर व ग खींचा, तो अब ग द एक समानान्तर चतुर्भुज हुआ।

\therefore अब = दग = ३० फीट। दस-दग = दस-अब = गस = ४४-३० = १४ फीट। \triangle बगस में बग = १३ फीट, वस = १५ फीट, गस = १४ फीट।

$$\therefore \triangle बगस का लंबाई = \frac{१३-१५-१५}{२} = २१ \text{ फीट।}$$

$$\therefore \triangle बगस का क्षेत्रफल = \frac{\sqrt{२१(२१-१३)(२१-१५)(२१-१४)}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{२१ \times ८ \times ६ \times ७}}{२} = \frac{\sqrt{७ \times ३ \times २ \times ४ \times ३ \times २ \times ७}}{२} = \frac{\sqrt{७^2 \times ३^2 \times २^2}}{२}$$

$$= ७ \times ३ \times २ = ४२ \text{ व. फी.}$$

$\therefore \triangle बगस$ की ऊँचाई = $\frac{२ \text{ व. फ.}}{\text{आधार}} = \frac{४२ \times २}{२१} \text{ फी.} = ४ \text{ फी.}$, यही समलम्ब चतुर्भुज की भी ऊँचाई है।

$$\therefore$$
 अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{१}{२} (४४ + ३०) \times ४ \text{ व. फी.}$
 $= ७४ \times ४ \text{ व. फी.} = २९६ \text{ व. फी.}$

अभ्यासार्थ प्रश्न

- (१) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाएँ १० फी० और १२ फी० और उसकी ऊँचाई १३ फी० हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (२) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाएँ ११ फी० ४३ इंच और १० फी० ८ इंच हैं। यदि इन भुजाओं के बीच की दूरी ६ फी० हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (३) एक समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाएँ ४ गज १ फी० ३ इंच और ५ गज २ फी० १ इंच हैं। यदि उन भुजाओं के बीच की दूरी १४ फी० हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (४) किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ५५० व. फी० और उसकी समा-

मुजाओं के बीच की दूरी १२ फी० हैं। यदि उक्त मुजाओं का अन्तर ४ फी० हो, तो उनका मान अलग-अलग बताओ।

- (१३) किसी समलम्ब चतुर्भुज में समानान्तर मुजाओं में से एक दूसरी से ३ फुट बड़ी है। यदि उसकी चौड़ाई ३ फुट और क्षेत्रफल २१६ वर्ग इंच हो, तो प्रत्येक समानान्तर मुजा का मान बताओ।
- (१४) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर मुजायें ५५ फी० और ७७ फीट हैं। यदि उसकी क्षेत्र मुजायें २५ फीट और ३३ फी० हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (१५) एक समलम्ब चतुर्भुजाकार रेल के प्लेटफॉर्म की समानान्तर मुजायें १०० फी० और १२० फी० हैं। यदि उसकी क्षेत्र क्षेत्र मुजायें १५ फी० के बराबर हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (१६) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर मुजायें २८ गज और ८८ गज हैं। यदि उसकी क्षेत्र मुजायें ३४ गज और ४२ गज हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (१७) एक समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर मुजायें ३० फीट और ३४ फीट हैं। यदि क्षेत्र क्षेत्र मुजायें १९ फीट और १२ फीट हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (१८) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार क्षेत्र को चारों तरफ से घेरने में प्रति गज ३ आना की दर से ९० रु० खर्च होता है। यदि प्रति १० वर्ग गज ४ आ० की दर से उसकी मालगुजारी २६० रु० होती है, और यदि उसकी निरखी मुजायें ११२ ग० और १०८ गज हैं, तो उस क्षेत्र की चौड़ाई बताओ।
- (१९) अ व स द एक समलम्ब चतुर्भुजाकार क्षेत्र की अ व मुजा = १८० फी०, व स = २४० फीट, स द = ३६० फीट, द अ = १४४ फीट और अ स = ३२० फीट हैं तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

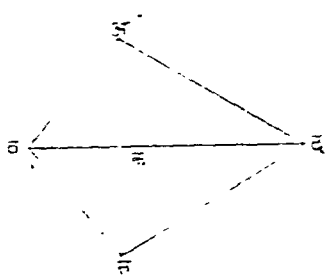
परिशिष्ट

सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

- (१) इससे पहले समानान्तर चतुर्भुज के प्रमेयों एवं समलम्ब चतुर्भुज के

मान लिया कि अ व स द चतुर्भुज के कर्ण अ स और व द एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \Delta अ व द + \Delta व स द = \frac{1}{2} व द \times अ क + \frac{1}{2} व द \times स क = \frac{1}{2} व द (अ क + स क) = \frac{1}{2} व द \times अ स = \frac{1}{2} प्र० कर्ण \times द्वि-कर्ण \dots (१)$$

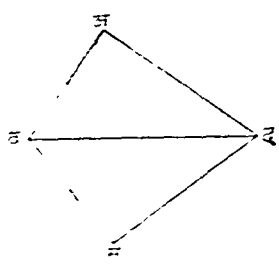


(२) ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी चारों भुजायें ज्ञात हों और जिसका एक कोण समकोण हो।

मान लिया कि अ व स द चतुर्भुज की चारों भुजायें मालूम हैं और $\angle व अ द = 90^\circ$

$$\therefore \angle व अ द = 90^\circ, \therefore कर्ण व द = \sqrt{अ व^2 + अ द^2}$$

अ व स द चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\Delta अ व द + \Delta व स द$ । परन्तु $\Delta अ व द = \frac{1}{2} अ व \times अ द$, तथा व स द त्रिभुज का भुजयोंग = यो, तो 'सर्वदोर्युतिदले' इस सूत्र के अनुसार उक्त त्रिभुज का क्षेत्र-



$$फल = \sqrt{\frac{यो}{द}(\frac{यो}{द}-वस)}(\frac{यो}{द}-सद)}(\frac{यो}{द}-दव)}$$

\therefore उक्त दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल का योग = अभीष्ट चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

(५) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी तीन भुजायें मालूम हों तथा दो ज्ञात भुजाओं के बीच का कोण और उस कोण के सामने का कोण समकोण हों। मान लिया कि अ व स द एक चतुर्भुज है, जिसकी अ व, व स और स द भुजायें ज्ञात हैं, तथा $\angle अ व स = 90^\circ = \angle स द अ$ ।

त्रैभुजफल = $\frac{1}{2}$ कर्ग × सामने के कोणों से उस कर्ग पर लम्बों का अन्तर
 = $\frac{1}{2} \times २५ \times १८$ व. ग. = २५×९ व. ग. = १०५ व. ग.।

(५) किसी चतुर्भुज के दोनों कर्ग २६ गज और १८ गज हैं। यदि वे कोणों परस्पर लम्ब रूप हों, तो उसका त्रैभुजफल बताओ।

त्रैभुजफल = $\frac{1}{2}$ कर्गों के घात = $\frac{1}{2} \times २६ \times १८$ व. ग. = २६×९ व. ग.
 = २३४ व. ग.।

(६) किसी चतुर्भुज का त्रैभुजफल $\frac{1}{2}$ एक कर्ग है। यदि उसके परस्पर लम्ब रूप कर्गों में से एक ३३ गज हो, तो दूसरा कर्ग बताओ।

दूसरा कर्ग = $\frac{२ \text{ त्रैभुजफल}}{\text{एक कर्ग}} = \frac{\frac{1}{2} \times २८४०}{३३}$ ग. = $\frac{१४२०}{३३}$ ग.
 = $\frac{१६६}{३}$ ग. = ५५ ग. २ फी. ८ इंच।

(७) अ व स द चतुर्भुज की अ व, व स, स द और द अ भुजायें क्रम से २८ ग., ४५ ग., ५१ ग. और ५२ ग. हैं। यदि उसका कर्ग अ स = ५३ ग., तो त्रैभुजफल बताओ।

Δ अ व स की भुजायें २८, ४५ और ५३ गज हैं, अतः भुजयोगार्थ
 = $\frac{२८ + ४५ + ५३}{२} = \frac{१२६}{२} = ६३$ गज, तथा Δ अ द स की भुजायें ५१, ५२
 और ५३ गज हैं, अतः भुजयोगार्थ = $\frac{५१ + ५२ + ५३}{२} = ५८$ गज।

\therefore अवस त्रिभुज का त्रैभुजफल = $\sqrt{६३(६३-२८)(६३-४५)(६३-५३)}$
 व. ग. = $\sqrt{६३ \times ३५ \times १८ \times १०}$ व. ग. = $\sqrt{२ \times ३ \times ३ \times ५ \times ५ \times २ \times २ \times ५}$
 व. ग. = $९ \times ३ \times ५ \times २$ व. ग. = ६३० व. ग.।

अ द स त्रिभुज का त्रैभुजफल = $\sqrt{५८(५८-५१)(५८-५२)(५८-५३)}$
 व. ग. = $\sqrt{५८ \times ७ \times ६ \times ५}$ व. ग. = $\sqrt{२६ \times ३ \times ३ \times ९ \times २६ \times ५ \times ५}$
 व. ग. = $२६ \times ९ \times ५$ व. ग. = ११७० व. ग.।

\therefore अभीष्ट चतुर्भुज का त्रैभुजफल = $(६३० + ११७०)$ व. ग. = १८०० व. ग.।

(८) अ व स द चतुर्भुज की अ व, व स, स द और द अ भुजायें क्रम से ५ इंच, १२ इंच, १४ इंच और १५ इंच हैं। यदि \angle अ व स = ९०° ,

तत्सन्धिद्विष्टः परलम्बश्रवणहतः परस्य पीठेन ।

भक्तो लम्बश्रुत्योर्योगात्स्यातामधः खण्डे ॥ ३५ ॥

लम्बतदाश्रितवाहोः लम्बं अस्य लम्बस्य सन्ध्याख्यम् । सन्ध्याख्यानूः पीठं, यस्य अधरं खण्डं साध्यं अस्ति तत्सन्धिः द्विष्टः, परलम्बश्रवणहतः, परस्य पीठेन भक्तः, लम्बश्रुत्योः योगात् अधः खण्डे स्याताम् ।

लम्ब और उसको स्पर्श करने वाली भुजा के बीच का खण्ड, उस लम्ब की सन्धि कहलाना है । सन्धि को भूमि में घटाने से पीठ होती है, जिसका अधः खण्ड साधन करना हो, उसकी सन्धि को दो जगह रख कर एक को परलम्ब से और दूसरे को पर कर्ण से गुणा कर दूसरे की पीठ से दोनों जगह भाग दें, तो लम्ब और कर्ण के योग से नीचे के खण्ड होते हैं ।

न्यासः । लम्बः १२६ तदाश्रितभुजः १६५ । अनयोर्न्यये यल्लम्बलम्बाश्रितवाहुवर्गेत्यादिनागताऽऽवाधा सन्धिसंज्ञा ४८ । तदूनितभूरिति द्वितीयावाधा ना पीठसंज्ञा २५० । एवं द्वितीयलम्बः २२४ । तदाश्रितभुजः २६० पूर्ववन् सन्धिः १३२ । पीठम् १६८ ।

अथाद्यलम्बस्याधः १२६ खण्डं साध्यम् । अस्य सन्धिः ४८ । द्विष्टः ४८ । परलम्बेन २२४ । श्रवणेन च २५० । पृथग्गुणितः १०५५२ । १३४४० । परस्य पीठेन १६८ । भक्तो लम्बं लम्बाधः खण्डम् ६४ । श्रवणाधः खण्डं च ८० । एवं द्वितीयलम्बस्य २२४ सन्धिः १३२ । परलम्बेन १२६ कर्णेन च ३१४ । पृथग्गुणितः परस्य पीठेन २५२ । भक्तो लम्बं लम्बाधः खण्डं ६६ । श्रवणाधः खण्डं च १६५ ।

उदाहरण—लम्ब १८९ और उसके आश्रित भुज १९५ का 'यल्लम्बलम्बाश्रित वाहुवर्ग' इस सूत्र से वर्गान्तर मूल ४८ = प्रथम सन्धि । इसको भूमि ३०० में घटाने से (३००-४८ =) २५२ प्रथम पीठ हुई । इसी प्रकार दूसरे लम्ब २२४ और तदाश्रित भुज २६० पर से द्वितीय सन्धि १३२ और द्वितीय पीठ १६८ हुई । यहाँ प्रथम लम्ब १८९ का अधः खण्ड साधन करना है, अतः इसकी सन्धि ४८ को दो जगह रख कर एक जगह पर लम्ब २२४ से और दूसरी जगह पर कर्ण २८० से गुणा कर दोनों जगह में पर पीठ १६८ से भाग देने पर लम्ब का अधः खण्ड = $\frac{1 \times 224 \times 1}{2 \times 189} = 64$ और कर्ण का अधः खण्ड

अथ सूच्यावायालम्बभुजज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तद्वयम् ।
लम्बहृतो निजसन्धिः परलम्बगुणः समाह्वयो ज्ञेयः ।
समपरसन्ध्योरैक्यं हारस्तेनोद्घृतां तां च ॥ ३७ ॥
समपरसन्धी भूर्जा सूच्यावाधे पृथक् स्याताम् ।
हारहृतः परलम्बः सूचीलम्बो भवेद्भूतः ॥ ३८ ॥
सूचीलम्बघ्नभुजा निजनिजलम्बोद्धृता भुजा सूच्याः ।
एवं क्षेत्रज्ञोदः प्राज्ञैस्त्रैराशिकान् क्रियते ॥ ३९ ॥

निजसन्धिः परलम्बगुणः लम्बहृतः समाह्वयः ज्ञेयः । समपरसन्ध्योः ऐक्यं हारः स्यात् । तां समपरसन्धी भूर्जां तेन हारेण उद्घृतां च तदा सूच्यावाधे पृथक् स्याताम् । परलम्बः भूतः हारहृतः सूचीलम्बः भवेत् । सूचीलम्बघ्नभुजा निजनिजलम्बोद्धृता सूच्याः भुजा भवतः । प्राज्ञैः एवं क्षेत्रज्ञोदः त्रैराशिकान् क्रियते ।

अपनी सन्धि को परलम्ब से गुणा कर अपने लम्ब से भाग देने पर जो लब्धि हो उसका नाम मन होना है । मन और परसन्धि का योग हार होता है । मन और परसन्धि को अलग-अलग भूमि से गुणा कर दोनों में हार से भाग देने पर दोनों लब्धि, सूची को आदाधायें होती हैं । परलम्ब को भूमि से गुणा कर हार से भाग देने पर सूची-लम्ब होता है । दोनों भुजाओं को सूची लम्ब से गुणा कर अपने २ लम्ब से भाग दें, तो सूची की भुजायें होती हैं । इस तरह बुद्धिमान् क्षेत्रावयवों का ज्ञान त्रैराशिक से करने हैं ।

अत्र किलायं लम्बः २२४ । अस्य सन्धिः १३२ । अथ परलम्बेन १२६ गुणितो २२४ ऽनेन भक्तो जातः समाह्वयः $\frac{224}{126}$ । अस्य परसन्धेश्च ४२ योगो हारः $\frac{126}{42}$ । अनेन भूतः ३०० समः $\frac{224 \times 224}{300}$ परसन्धिश्च $\frac{126 \times 224}{300}$ भक्तो जाते सूच्यावाधे $\frac{224 \times 224}{300}$ । $\frac{126 \times 224}{300}$ । एवं द्वितीय-समाह्वयः $\frac{224}{126}$ । द्वितीयो हारः $\frac{126}{42}$ । अनेन भूतः स्वीयः समः $\frac{224 \times 224}{300}$ परसन्धिश्च $\frac{126 \times 224}{300}$ । भक्तो जाते सूच्यावाधे $\frac{224 \times 224}{300}$ । $\frac{126 \times 224}{300}$ परलम्बः २२४ भूमि ३०० गुणो हारेण $\frac{224}{126}$ भक्तो जातः सूचीलम्बः $\frac{224}{126}$ । सूचीलम्बेन भुजा १२५ । २६० । गुणितो स्वस्वलम्बाभ्यां १२६ । २२४ यथाक्रमं भक्तो जाते स्वमार्गे वृद्धा भूर्जानुजा $\frac{224 \times 224}{300}$ । $\frac{126 \times 224}{300}$ । एवमत्र सप्तत्र भागहारराशिप्रमाणम् । गुण्यागुणको तु यथायोग्यं फलेच्छे प्रकल्प्य सुधिया त्रैराशिकमुद्यम् ।

$$= \frac{दुउ \times व इ}{व उ} = \frac{अ. लम्ब \times आ. सं.}{द्वि. पां.} \text{ एतेन 'सन्धिद्विष्टः परलम्बध्रवगहतः परस्य}$$

पीठेनभक्त' इति सूत्रनुपपन्नम् । अथ व, स विन्दोः वसन्त्युपरि व च, स प लम्बौ विधाय व द स अ क्रमैः क्रमेण प च पर्यन्तं त्र्यनीयौ । अथ व स च, स

$$अ इ त्रिभुजौ जानौ । अनयोः साजात्यादनुपातेन व च = \frac{अ इ \times व स}{स इ} =$$

प्र.लं. भूमि
प्र.पी । एवं व स प, व उ द त्रिभुजयोः साजात्यतोऽनुपातेन—स प

$$= \frac{दुउ \times व स}{व उ} = \frac{द्वि.लं. \times भू.}{द्वि.पां.} \text{ । तत आभ्यां वंशाभ्यां अन्योन्यमूलाग्रसूत्रयो-$$

गादिन्यादिना क ग लम्बस्तथा व ग, स ग आवाधे साधनीये, तेन लम्बौ भूमी तिजनिजपीठविनकाविति सूत्रसुरपद्यते । अथ द विन्दोः अ व समाना-
न्तरा द ट रेखा विधेया तदा अ व इ, द ट उ त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन

$$द उ = \frac{व इ \times द उ}{अ इ} = \frac{आ.सं. \times द्वि. लं.}{प्र.लं.} = स न । द उ + उ स = ट स = द्वि. सं. +$$

स न = हारः । अथ स द ट, स ग व त्रिभुजौ मजानीयौ ततः पष्ठाध्यायेन

$$\frac{व ट}{स ट} = \frac{ट न}{स द} \text{ । परञ्च } \frac{द न}{स द} = \frac{न उ}{उ स} \text{ अतः } \frac{व ट}{स ट} = \frac{न उ}{उ स} \text{ । } \therefore \frac{व ट}{स ट} + 1 =$$

$$\frac{न उ}{उ स} + 1 \text{ । } \therefore \frac{व ट + म ट}{स ट} = \frac{न उ + उ स}{उ स} \text{ । } \therefore \frac{व स}{स ट} = \frac{न स}{उ स} \text{ । } \therefore स न =$$

$$स न = \frac{व स \times उ म}{स ट} = \frac{भू. \times द्वि. सं.}{हा} = सूची प्र. आ. । एवमेव द्वि. आवा =$$

$$\frac{भू. \times प्र. सं.}{हा} \text{ । लम्बः } = \frac{दुउ \times स न}{स ट} = \frac{द्वि. लं. \times भू.}{हा} \text{ एवं व स } = \frac{द म \times व न}{द उ} =$$

$$\frac{प्र. सु. \times सू. लं.}{प्र. लं.} = सूची भुजः । एवं सू. द्वि. सु. = \frac{द्वि. सु. \times सू. लं.}{द्वि. लं.} \text{ । अनउपपन्नं}$$

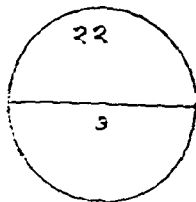
सर्वम् ।

अथ वृत्तज्ञेये करणसूत्रं वृत्तम

व्यासे भनन्दाग्नि हते विभक्ते स्ववागर्ह्यैः परिधिः स सूक्ष्मः ।

अथवा परिविक्तो व्याप्तानयनाय-

सः ।



गुणहारविपर्ययेण व्याप्तानानं
सूत्रं ७ इति स्थूलं वा ७ ।

उदाहरण—यहाँ व्यास ७ है, अतः सूत्र के अनुसार इसको ३९२० से
ग कर १२५० से भाग देने पर सूत्र परिधि = $\frac{७ \times ३९२०}{१२५०} = \frac{२७६४०}{१२५०}$
: २१६३३ $\frac{३}{५}$ । इसी तरह व्यास ७ को २२ से गुणा करने पर ७ × २२
: १५४ हुआ । इसको ७ से भाग देने से $\frac{१५४}{७} = २२$ स्थूल परिधि हुई ।

परिधि से व्यास का आनयन ।

∴ $प = \frac{व्या \times ३९२०}{१२५०}$ ∴ व्या = $\frac{प \times १२५०}{३९२०}$ । इसलिये परिधि २२ को
२५० से गुणा कर ३९२० से भाग देने पर = $\frac{२२ \times १२५०}{३९२०} = ७ \frac{३३३}{४०}$ सूत्र
वास हुआ । अथवा स्थूल व्यास = $\frac{२२ \times ७}{१} = ७$ ।

परिशिष्ट

यदि हमलोग किसी वृत्त की परिधि को नापकर, फिर उसके व्यास को
नापते हैं, तो परिधि की लम्बाई व्यास की लम्बाई से लगभग $\frac{३२}{७}$ गुनी
होती है । परिधि और व्यास की निम्नलिखित वास्तव मान अङ्कों में व्यक्त नहीं
किया जा सकता है । इसका आसन्न मान ग्रीक भाषा में = (पाई) से व्यक्त
किया जाता है । पाई का मान सात दशमलव अङ्कों तक = ३.१४१५९२६
होता है । भास्कराचार्य ने = का सूत्रमान $\frac{३३३}{७०}$ माना है, जो ३.१४१६
होना है । यह पूर्वोक्त मान के आसन्न है । व्यवहार के लिये = का मान $\frac{३२}{७}$
माना गया है ।

$$\begin{aligned} \text{अथ } \therefore \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} &= \pi, \therefore प = \pi \times \text{व्या} = \pi \times ३ \text{त्रिज्या} \\ &= २\pi \times \text{त्रि} \dots\dots (१) \\ \therefore प &= २\pi \times \text{त्रि}, \therefore २ \text{त्रि} = \frac{प}{\pi}, \text{ या व्या} = \frac{प}{\pi} \dots\dots (२) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{वृत्ताकार मैदान की परिधि} &= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 22 = \frac{2 \times 22 \times 22 \times 2}{7} \text{ गज} \\ &= 2 \times 22 \times 22 \text{ गज} = 968 \text{ गज} \end{aligned}$$

∴ १ गज को घेरने में ८ आ० खर्च होता है।

$$\begin{aligned} \therefore 968 \text{ गज को घेरने में } &968 \times 8 \text{ आ० खर्च लगेगा} \\ &= \frac{968 \times 8}{100} \text{ रु०} = 77.44 \text{ रु०} \end{aligned}$$

(७) किसी इञ्जिन के पहिये का व्यास ४९ इ० है। यदि $n = \frac{22}{7}$ हो, तो प्रति ४ मिनट में ३००० चक्कर लगाने के लिये उसे किस गति से चलना पड़ेगा।

$$\begin{aligned} \text{इञ्जिन के पहिये की परिधि} &= \pi \times \text{व्या} = \frac{22}{7} \times 49 \text{ इञ्च} = 154 \text{ इञ्च} \\ &= \frac{154}{12} \text{ फी०, तो एक चक्कर में इञ्जिन } \frac{154}{12} \text{ फी० पार करती है। अतः} \\ 3000 \text{ चक्कर में } &\frac{3000 \times 154}{12} \text{ फी० पार करेगी।} \end{aligned}$$

$$\therefore 4 \text{ मिनट में } \frac{3000 \times 154}{12} \text{ फी० चलती है}$$

$$\begin{aligned} \therefore 60 \text{ मिनट में } &\frac{3000 \times 154 \times 60}{12} \text{ फी० वह इञ्जिन चलेगी} \\ &= 231000 \times 60 \text{ फी०} = \frac{231000 \times 60 \times 1.5}{100} \text{ माइल} \\ &= \frac{231000 \times 90}{100} \text{ मा०} = 2079 \text{ मा०} = 109 \frac{3}{4} \text{ माइल।} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{इञ्जिन की गति प्रति घण्टा } 109 \frac{3}{4} \text{ माइल।}$$

(८) एक वृत्ताकार वासदार मैदान के चारों तरफ एक सड़क है। यदि वृत्त का बाहरी और भीतरी घेरा क्रम से ५०० गज और ३०० गज तथा $n = \frac{22}{7}$ है, तो सड़क की चौड़ाई बताओ।

मान लिया कि बाहरी और भीतरी वृत्त की परिधि क्रम से p और p' तथा उनकी त्रिज्याएँ क्रम से r और r' हैं, तो सड़क की चौड़ाई = $r - r'$ ।

$$\begin{aligned} \text{अब बाहरी वृत्त की त्रिज्या} &= \frac{p}{2\pi} = \frac{500}{2 \times \frac{22}{7}} \text{ तथा भीतरी वृत्त की त्रिज्या} = \frac{p'}{2\pi} \\ &= \frac{p}{2\pi} = \frac{300}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore r - r' &= \left(\frac{500}{2\pi} - \frac{300}{2\pi} \right) \text{ ग०} = \frac{200}{2\pi} \text{ ग०} = \frac{100}{\pi} \text{ ग०} \\ &= \frac{100 \times 7}{22} \text{ ग०} = \frac{700}{11} \text{ ग०} = 63 \frac{7}{11} \text{ गज।} \end{aligned}$$

- ३) एक गाड़ी का पहिया दो माइल जाने में ६४ चक्कर लगाता है, तो उसका व्यास बताओ ।
- ४) एक वृत्ताकार घासदार मैदान का व्यास ६ फी० ५ इंच है, तो प्रति गज ६ आने की दर से उसको चारों तरफ घेरने में कितना तर्ब लगेगा ।
- ५) एक इन्जिन का पहिया, जिसका व्यास ५ फी० ३ इंच है, १ मिनट में २०४ चक्कर लगाता है, तो वह गाड़ी किस गति से चलती है ।
- ६) एक ट्रेन ३० माइल प्रति घण्टे की गति से चलती है । यदि ३ मिनट में इन्जिन का पहिया २४० चक्कर लगाता है, तो पहिये का व्यास बताओ ।
- ७) किसी वृत्ताकार घासदार मैदान के चारों तरफ एक सड़क है । यदि वृत्त का बाहरी घेरा २८८ ग० और भीतरी घेरा ११२ ग० है, तो सड़क की चौड़ाई बताओ ।
- ८) दो वृत्तों की त्रिज्याओं का योग ६३ फी० है । यदि उनकी परिधियों का अन्तर ७६ फी० हो, तो परिधि के मान बताओ ।
- ९) एक वृत्त की परिधि दूसरे वृत्त की परिधि से दूनी है । यदि उनके व्यासों का अन्तर १४ फी० हो, तो उनकी त्रिज्या अलग-अलग बताओ ।
- १०) किसी वृत्त की परिधि और व्यास का योग ११६ फी० है, तो उनकी त्रिज्या बताओ ।
- ११) किसी वृत्त की परिधि का आधा और व्यास का योग १७ फी० है, तो उनकी त्रिज्या बताओ ।
- १२) किसी वृत्त की परिधि और व्यास का अन्तर ८ गज है, तो उस वृत्त की परिधि और त्रिज्या अलग-अलग बताओ ।
- १३) एक वृत्त की परिधि और व्यास का अन्तर ६० फी० है, तो उसकी त्रिज्या बताओ ।

वृत्तगोलयोः फलानयने करणसूत्रं वृत्तम् ।

वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं तन्

शुष्णं वेदैरुपरि परितः कन्दुकस्यैव जालम् ।

गोलस्यैव तदपि च फलं पृष्ठजं व्यासनिर्ध

पड्भिर्भक्तं भवति नियतं गोलगर्भे वनाख्यम् ॥ ४१ ॥

वेधस्य त्रिज्यातुल्यत्वम्)। अथ 'समन्त्रातफलव्यंशः सूचीन्त्राते फलमित्यादिना सूचीघनफलम्' = $\frac{\text{घृ. फ. व्या}}{\text{न}} \times \frac{\text{व्या}}{२ \times ३}$ । परञ्च गोलगर्भे न मितानि सूचीघनफलानि

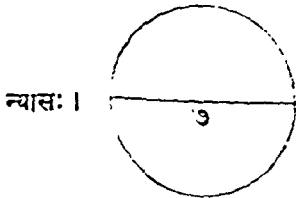
सन्त्यत इदं सूचीघनफलं न संख्यया गुणितं ज्ञातं गोलघनफलम् = $\frac{\text{घृ. फ. व्या}}{\text{न}} \times \text{न}$
 = $\frac{\text{घृ. फ. व्या}}{३}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

यद्वासस्तुरगैर्मितः क्विल फलं क्षेत्रे समे तत्र किं
 व्यासः सप्तमितश्च यस्य सुमते गोलस्य तस्यापि किम् ।
 पृष्ठे कन्दुकजालसन्निभफलं गोलस्य तस्यापि किं
 मध्ये ब्रूहि घनं फलं च विमलां चेट्रेत्सि लीलावतीम् ॥ १ ॥

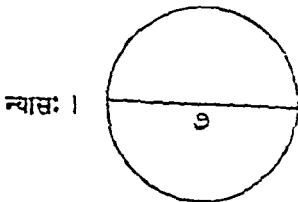
जिस वृत्त का व्यास ७ है, उसका क्षेत्रफल, एवं जिस गोल का व्यास ७ है उसका पृष्ठफल और उसी गोल का घनफल, यदि तुम पार्श्वगुणित जानते हो, तो बताओ ।

वृत्तक्षेत्रफलदर्शनाय



व्यासः ७ ।
 परिधिः २१ $\frac{२२}{७}$ ।
 क्षेत्रफलम् ३८ $\frac{४९}{७}$ ।

गोलपृष्ठफलदर्शनाय



व्यासः ७ ।
 गोलपृष्ठफलम् १५३ $\frac{१५३}{७}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{व्या} \times २२ \times \text{व्या}}{३ \times ४} = \frac{\text{व्या}^2 \times २२}{१२} = \frac{\text{व्या}^2 \times ११}{६} \quad | \text{अथ गोल पृ० फलम्} \\
 &= \text{त्रे. फ} \times ४ = \frac{\text{व्या}^2 \times ११ \times ४}{६ \times ४} = \frac{\text{व्या}^2 \times २२}{६} \quad | \text{अथ: गोल घन फलम्} \\
 &= \frac{\text{पृ. फ} \times \text{व्या}}{६} = \frac{\text{व्या}^2 \times २२ \times \text{व्या}}{३ \times ६} = \frac{\text{व्या}^3 \times २२}{१८} = \frac{\text{व्या}^3}{१८} (२१ + १) \\
 &= \frac{\text{व्या}^3}{६} (\frac{२१}{३} + \frac{१}{३}) = \frac{\text{व्या}^3}{६} (१ + \frac{१}{३}) = \frac{\text{व्या}^3}{६} + \frac{\text{व्या}^3}{१८} \quad | \text{अथ उपपद्यते }
 \end{aligned}$$

न्यासः ७। अस्य वर्गं ४६। मनवाग्निनित्रे पञ्चसहस्रमके तदेव सूत्रं फलम् $३ = \frac{२ \times ३}{३}$ । अथवा व्यासस्यवर्गं ४६। तत्राहते ४३६। शक्यते लब्धं स्थूलं फलम् $३ = \frac{३}{३}$ । घनोक्तव्यासद्वलम् $\frac{३ \times ३}{३}$ निजैकविंशंशयुगोलस्य घनफलं स्थूलम् १७६३।

उदाहरण—व्यास ७ के वर्ग ४९ को ३९२७ से गुणाकर ५००० से भाग देने पर सूत्रफल $= ३८ \frac{२}{३}$ । वा ४९ को ११ से गुणाकर १४ से भाग देने पर स्थूलफल $= ३८ \frac{२}{३}$ । व्यास ७ के घन ३४३ के भाग में अपना २१वाँ भाग जोड़ने से स्थूल घनफल $= \frac{३ \times ३}{३} + \frac{३ \times ३}{३} = १७६३$ ।

परिशिष्ट ।

$$\begin{aligned}
 \text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi \times \text{व्या}}{४} = \frac{\pi \times \text{व्या} \times \text{व्या}}{४} = \frac{\pi \times २ \text{ त्रि} \times २ \text{ त्रि}}{४} \\
 &= \pi \times \text{त्रि}^2 \dots \dots \dots (१)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{त्रि} = \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}} \dots \dots \dots (२)$$

दो समकेन्द्रिक वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल ।

यदि दो समकेन्द्रिक वृत्तों का त्रिज्यायें क्रम से त्रि और त्रि' हो तब

$$\text{त्रि} > \text{त्रि}', \text{ तो दोनों वृत्तों के बीच का रकबा} = \pi (\text{त्रि}^2 - \text{त्रि}'^2)$$

$$= \pi (\text{त्रि} + \text{त्रि}') (\text{त्रि} - \text{त्रि}') \dots \dots \dots (३)$$

उदाहरण

(१) किसी वृत्त का त्रिज्या ४ तब २ फी० है। यदि $\pi = \frac{३१४}{१००}$ हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi \times \text{त्रि}^2 \quad | \text{ यहाँ त्रि} = ४ \text{ तब } २ \text{ फी०} = १४ \text{ फी०} \quad |$$

(६) दो समकेन्द्रिक वृत्तों में बड़े वृत्त की त्रिज्या और दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल क्रम से ६ फी०, और ११० वर्गफीट हैं। यदि $n = \frac{3}{2}$ हो, तो छोटे वृत्त की त्रिज्या बताओ।

$$\text{दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल} = n (\text{त्रि}^2 - \text{त्रि}^2)$$

$$\therefore \text{छोटे वृत्त की त्रिज्या} = \sqrt{\frac{\text{दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल}}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{६२ - ११०}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{३६ - ११० \cdot २}{३}} = \sqrt{३६ - ३५} = १ \text{ फी०}$$

(७) किसी वृत्ताकार क्षेत्र की मालगुजारी प्रति एकड़ ५ रु० की दर से ६२५० रु० होता है। यदि $n = \frac{3}{2}$ हो तो उसका व्यास बताओ।

\therefore ५ रु०—१ एकड़ की मालगुजारी होता है।

\therefore ६२५० रु०—६२५० \div ५ एकड़ की मालगुजारी होगा।

$$= १२५० \text{ एकड़। अब क्षेत्र का क्षेत्रफल} = १२५० \text{ एकड़}$$

$$= १२५० \times ४८४० \text{ वर्ग ग०।} \therefore \text{वृत्ताकार क्षेत्र की त्रि} = \sqrt{\frac{\text{क्ष. फ.}}{\pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{१२५० \times ४८४०}{\frac{22}{7}}} \text{ ग०} = \sqrt{\frac{१२५ \times ४८४ \times ७}{22}} \text{ ग०}$$

$$= \sqrt{२५ \times १०० \times ५ \times २२ \times ७} \text{ ग०} = ५ \times १० \sqrt{७७०} \text{ ग०} =$$

$$५० \sqrt{७७०} \text{ ग०।} \therefore \text{व्या} = १०० \sqrt{७७०} \text{ ग०।}$$

(९) किसी वृत्त की परिधि ३९६ फीट है। यदि $n = \frac{3}{2}$ हो तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{वृत्त की त्रिज्या} = \frac{P}{2\pi} = \frac{३९६ \times ७}{२ \times २२} \text{ फी०} = ९ \times ७ \text{ फी०} = ६३ \text{ फी०।}$$

$$\text{अब वृत्त का क्षेत्रफल} = n \times \text{त्रि}^2 = \frac{3}{2} \times ६३^2 \text{ वर्ग फी०}$$

$$= २२ \times ९ \times ६३ \text{ वर्ग फी०} = १२४०२ \text{ वर्ग फी०।}$$

(१०) किसी वृत्त का क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ८४ और ६६ फी० है। यदि $n = \frac{3}{2}$ हो, तो वृत्त की त्रिज्या बताओ।

$$\therefore \text{आयत का क्षेत्रफल} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} = ८४ \times ६६ \text{ वर्ग फी०}$$

$$\text{अब प्रश्न के अनुसार आयत का क्षेत्रफल} = \text{वृत्त का क्षेत्रफल}$$

- (६) ९८५६ व. फी० ।
- (७) ७ व. ग. १ व. फी० ।
- (८) एक वृत्ताकार वासदार मैदान में चारों तरफ रास्ता है। यदि उसका बाहरी और भीतरी व्यास क्रम से १० ग० और ८ ग० हों, तो रास्ते का क्षेत्रफल बताओ ।
- (९) एक वृत्ताकार चबूतरे के चारों तरफ फूल की ब्यारी लगी है। यदि उसकी भीतरी त्रिज्या १०१ फीट हो और बाहरी त्रिज्या उससे दूनी हो तो ब्यारी का क्षेत्रफल बताओ ।
- (१०) किसी वृत्ताकार टेबुल की त्रिज्या १४ फी० है। एक वृत्ताकार संगमरमर का डुब्बा, जिसका क्षेत्रफल ६१६ व. फी० है, उस टेबुल के मध्य में लगा हुआ है, तो टेबुल के शेष भाग का क्षेत्रफल बताओ ।
- (११) एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या २१ गज है, तो प्रति वर्गगज ४ दि० की दर से उसमें पत्थर का फर्श कराने में कितना खर्च लगेगा ।
- (१२) किसी वृत्ताकार मैदान में प्रति वर्गगज ५ दि० की दर से पत्थर बिछाने का खर्च १५४ पौ० लगता है, तो उसकी त्रिज्या बताओ ।
- (१३) एक वृत्ताकार इस्पात के डुब्बे का मुख्य प्रति वर्गगज ८ दि० की दर से ९६० पौ० ८ दि० होता है, तो उसका व्यास बताओ ।
- (१४) एक वृत्ताकार मैदान के चारों तरफ एक रास्ता है। यदि रास्ते का क्षेत्रफल मैदान के क्षेत्रफल के बराबर हो और मैदान की त्रिज्या ४० फीट हो, तो रास्ते की चौड़ाई बताओ ।
- (१५) दो वृत्तों की त्रिज्यायें क्रम से ५ ग० और १२ गज हैं, तो उस वृत्त की त्रिज्या बताओ, जिसका क्षेत्रफल उक्त वृत्तों के क्षेत्रफल के योग के समान हो ।
- (१६) किसी वृत्त का क्षेत्रफल १३८६ व. ग. है, तो उसकी परिधि बताओ ।
- (१७) किसी वृत्त का क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ८८ फी० और २८ फी० हैं, तो उस वृत्त का व्यास बताओ ।
- (१८) किसी वृत्त की त्रिज्या १४ ग० है। यदि उसका क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो, तो वर्ग की सुजा बताओ ।

$$क द - क स = द स = शरः = त्रि - नू = \frac{२ त्रि - नू}{२} = \frac{व्या - नू}{२}$$

$$अ स = \sqrt{अ क^२ - क स^२} = \sqrt{क द^२ - क स^२}$$

$$= \sqrt{(क द + क स) (क द - क स)}$$

$$= \sqrt{(क प + क स) (क द - क स)} = \sqrt{प स \times स द}$$

$$= \sqrt{(प द - द स) \times स द} = \sqrt{(व्या - श) श}$$

$$\therefore २ अ स = २ \sqrt{(व्या - श) श}$$

$$चा अ व = \sqrt{(व्या - श) श} = जीवा ।$$

$$अथ ज्या = २ \sqrt{(व्या - श) श} । \therefore \frac{ज्या}{२} = \sqrt{(व्या - श) श}$$

$$\therefore \left(\frac{ज्या}{२}\right)^२ = (व्या - श) श । \therefore \frac{\left(\frac{ज्या}{२}\right)^२}{श} = व्या - श$$

$$\therefore व्या = \frac{\left(\frac{ज्या}{२}\right)^२}{श} + श अतः उपपन्नं सर्वम् ।$$

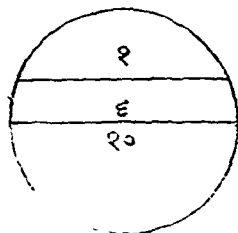
उदाहरणम् ।

दशविस्तृतिवृत्तान्तर्यत्र ज्या परिमता सत्त्वे ।

तत्रेपुं वद त्राणाज्यां ज्यावाणाभ्यां च विस्तृतिम् ॥ १ ॥

जिस वृत्त का व्यास १० और जीवा ६ हैं उसका शर वताओ, एवं जीवा और शर पर से व्यास बताओ ।

न्यासः



व्यासः १० । ज्या ६ । योगः

१६ । अन्तरम् ४ । घातः ६४ । मूलम् ८ ।

एतदूनो व्यासः २ । दलितः १ । जातः शरः

१ । व्यासान् १० । शरोनात् ६ । शर १ संगुणान्

६ । मूलं ३ द्विनिर्णं जाता जीवा ६ । एवं

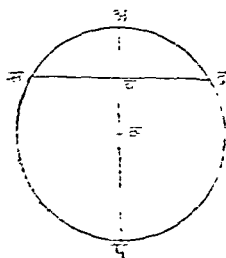
ज्ञाताभ्यां ज्यावाणाभ्यां व्यासानयनं यथा ।

जीवाद्द्वे ३ । वर्गे शर १ भक्ते ६ । शर १ युक्ते

जातो व्यासः १० ।

उदाहरण—यहाँ व्यास १० और जीवा ६ के योग १६ और अन्तर ४ के गुणनफल ६४ के मूल ८ को व्यास १० में घटा कर शेष २ का आधा १ शर

- (२) किसी वृत्ताकार झील के किनारे से एक जहाज उस झील की व्यास रेखा पर चला, लेकिन ३ माइल जाने के बाद एक आन्धी के कारण वह जहाज पहले की दिशा से लम्ब रूप दिशा में खाना होकर ५ माइल चलने के बाद फिर झील के किनारे पहुँच गया, तो झील की चौड़ाई बताओ।



मान लिया कि अ स्थान से वह जहाज अ प दिशा में चल कर अब वह व बिन्दु पर आया, तो आन्धी के कारण व स दिशा की ओर मुड़ गया, और इसके बाद ५ माइल चल कर स स्थान पर पहुँचा, तो झील की चौड़ाई यानी व्यास का मान लाना है।

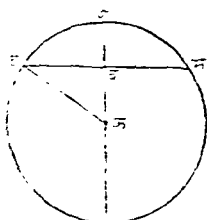
यहाँ अ व = दूर = ३ माइल, और व स

$$= \frac{\text{पूज्या}}{३} = ५ \text{ माइल।}$$

$$\therefore \text{झील की चौड़ाई} = \text{व्या} = \frac{(\frac{\text{पूज्या}}{३})^2}{३} + ३ = (\frac{२५}{३} + ३) \text{ माइल।}$$

$$= \frac{२५+९}{३} \text{ माइल} = \frac{३४}{३} \text{ माइल} = ११\frac{१}{३} \text{ माइल।}$$

- (५) किसी वृत्त की पूर्णज्या (चाप जीवा) ६ इञ्च और केन्द्र से उसकी दूरी ४ इञ्च हैं, तो चाप की ऊँचाई बताओ।



मान लिया कि व स वह पूर्णज्या है जिसकी लम्बाई ६ इञ्च और क द उसकी केन्द्र से दूरी ४ इञ्च हैं, तो व द = $\frac{\text{व स}}{२} = ३$ इञ्च, क व = त्रिज्या

$$= \sqrt{\text{व द}^2 + \text{क द}^2} = \sqrt{३^2 + ४^2} \text{ इञ्च}$$

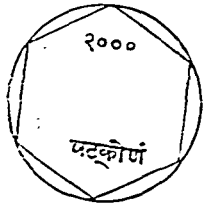
$$= \sqrt{९ + १६} = \sqrt{२५} \text{ इञ्च} = ५ \text{ इञ्च।}$$

\therefore व्यास = १० इञ्च। अ व स

$$= \frac{\text{व्या} - \sqrt{\text{व्या}^2 - \text{पूज्या}^2}}{२} = \frac{१० - \sqrt{१०० - ३६}}{२} \text{ इञ्च}$$

$$= \frac{१०-८}{२} \text{ इञ्च} = १ \text{ इञ्च।}$$

न्यासः । वृत्तान्तः पङ्मुजे भुजमानानयनाय—



व्यासः २००० । खलत्राभ्ररसै (६००००)
गुणितः (१२०००००००) खलत्राभ्रकै—
(१२००००) भक्तो लब्धं पङ्मुजमानम् १०००।

न्यासः । वृत्तान्तः सप्तमुजे भुजमानानयनाय—



व्यासः २००० । वारोपुनखवाण—(५२०५२)
गुणितः (१०४११००००) खलत्राभ्रकै—
(१२००००) भक्तो लब्धं सप्तमुजमानम्
२६७५३ ।

न्यासः । वृत्तान्तरष्टमुजे भुजमानानयनाय—



व्यासः २००० । द्विद्विनन्देपुसागरै—
(४५६०२) गुणितः (६१२४००००) खलत्रा-
भ्रकै—(१२००००) भक्तो लब्धमष्टमुज-
मानम् ७६४३३ ।

न्यासः । वृत्तान्तर्नवमुजे भुजमानानयनाय—



व्यासः २००० । कुरामदशवेदै ४१०३१)
गुणितः (२००६००००) खलत्राभ्रकै (१२००००)
भक्तो लब्धं नवमुजे भुजमानम् ६२३३३ ।

$$\therefore \text{या} \times \text{प}^2 = \frac{\text{व्या} (३६ \text{ का} - ५ \text{ प}^2)}{५} \dots\dots\dots (१)$$

एवं यदि चा = $\frac{\text{प}}{३}$ तदा ज्याचा = व्या,

$$\therefore \text{व्या} = \frac{\text{या} (५ - \frac{\text{प}}{३}) \frac{\text{प}}{३}}{\text{का} - (५ - \frac{\text{प}}{३}) \frac{\text{प}}{३}} = \frac{\text{या} \times \text{प}^2}{४ \text{ का} - \text{प}^2}$$

$$\therefore \text{या} \times \text{प}^2 = \text{व्या} (४ \text{ का} - \text{प}^2) \dots\dots\dots (२)$$

(१), (२) समीकरणयोः साम्यात्

$$\frac{\text{व्या} (३६ \text{ का} - ५ \text{ प}^2)}{५} = \text{व्या} (४ \text{ का} - \text{प}^2)$$

$$\therefore ३६ \text{ का} - ५ \text{ प}^2 = १० (४ \text{ का} - \text{प}^2)$$

$$\therefore ३६ \text{ का} - ५ \text{ प}^2 = ४० \text{ का} - १० \text{ प}^2$$

$$\therefore ४ \text{ का} = ५ \text{ प}^2, \quad \therefore \text{का} = \frac{५ \text{ प}^2}{४} \text{ । अनेन (२) समीकरणे उत्था-$$

$$\text{पिते या} \times \text{प}^2 = \text{व्या} \left(\frac{४ \times ५ \text{ प}^2}{४} - \text{प}^2 \right) = \frac{\text{व्या} \times १६ \text{ प}^2}{४}$$

$$= \text{व्या} \times ४ \text{ प}^2 \text{ । } \therefore \text{या} = ४ \text{ व्या । अथ या का नानान्यां 'ज्याचा'$$

स्वरूपमुत्थापनेनार्भाष्टचापपूर्णज्या

$$= \frac{४ \text{ व्या} (५ - \text{चा}) \text{ चा}}{५ \text{ प}^2 - (५ - \text{चा}) \text{ चा}} \text{ अतः } (५ - \text{चा}) = \text{प्र} = \text{आ},$$

$$\therefore \text{ज्याचा} = \frac{४ \text{ व्या} \times \text{प्र}}{५ \text{ प}^2 - \text{आ}} \text{ अतः उपपन्नम्}$$

उदाहरणम् ।

अष्टादशांशेन वृत्तेः समानमेकादिनिघ्नेन च यत्र चापम् ।

पृथक् पृथक् तत्र वृत्तं जीवां त्वाकर्मितं व्यासदलं च यत्र ॥

जिस वृत्त का व्यासार्ध १२० है और एकादि गुणित उस वृत्त का १८वाँ भाग चाप-मान है तो उनकी जीवा अलग-अलग द्वात्र वताओ ।

जीवाङ्घ्रिपञ्चगुणितः परिधेस्तुवर्गः ।

लघ्वोनितात् परिधिर्वर्गचतुर्थभागा-

दाप्ते पदे वृत्तिदलात् पतिते घनुः स्यात् ॥ ४९ ॥

जीवाङ्घ्रिपञ्चगुणितः परिधेः वर्गः व्यासाद्विवातयुतमौर्विक्रया विभक्तः, लघ्वोनितात् परिधिर्वर्गचतुर्थभागात् आप्ते पदे वृत्तिदलात् पतिते घनुः स्यात् ।

पञ्चगुणित जीवा के चतुर्थांश से परिधि-वर्ग को गुणा कर उसमें जीवा से युक्त चतुर्गुणित व्यास से भाग देकर लघ्वि को परिधि-वर्ग के चतुर्थांश में घटा कर शेष का मूल जो हो, उसे परिधि के आधे में बढ़ाने पर चाप का मान होता है ।

उपपत्तिः—चापोननिम्नपरिधिरित्यादिना ज्यामानम् = ज्या

$$= \frac{४ \text{ ज्या} (प - चा)}{५ प^२} \therefore \text{ज्या} \left\{ \frac{५ प^२}{४} - (प - चा) चा \right\} \\ = \frac{५ प^२}{४} - (प - चा) चा,$$

$$\therefore \text{ज्या} \times \frac{५ प^२}{४} = ४ \text{ ज्या} (प - चा) चा + \text{ज्या} (प - चा) चा$$

$$\therefore \text{ज्या} \times \frac{५ प^२}{४} = (प - चा) चा (४ ज्या + ज्या)$$

$$\therefore \frac{\text{ज्या} \times \frac{५ प^२}{४}}{४ ज्या + ज्या} = (प - चा) चा = प \times चा - चा^२,$$

पञ्चो ऋगरूपेण संगुणितौ जातौ

$$- \frac{\text{ज्या} \times \frac{५ प^२}{४}}{४ ज्या + ज्या} = चा^२ - प \times चा, \text{ पञ्चयोः } \left(\frac{५ प^२}{४} \right) \text{ संयोज्य}$$

$$\text{मूलेन} - \sqrt{\frac{५ प^२}{४} - \frac{\text{ज्या} \times \frac{५ प^२}{४}}{४ ज्या + ज्या}} = प - चा,$$

$$\therefore चा = \frac{प}{४} - \sqrt{\frac{५ प^२}{४} - \left(\frac{\text{ज्या} \times \frac{५ प^२}{४}}{४ ज्या + ज्या} \right)} \text{ अत उपपद्यन् ।}$$

अथ खातव्यवहारः

त्र करणसूत्रं सार्द्धार्था

गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या ।

स्थानक्रमित्या सममितिरेवं दैर्घ्ये च वेधे च ॥ १ ॥

क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तमङ्ख्या स्यात् ।

बहुषु स्थानेषु विस्तारं गणयित्वा तद्युतिः स्थानक्रमित्या (नापितस्थान-
संख्यया) भाज्या तदा सममितिः स्यात् । एवं दैर्घ्यं वेधे च सममितिः साध्या ।
क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तमङ्ख्या स्यात् ।

विषम खात की लम्बाई, चौड़ाई और गहराई ये तीनों या इनमें से कोई
दो या एक सर्वत्र समान नहीं हो, उसे असम खात कहते हैं । ऐसे खात के
असम विस्तार को बहुत जगह में नाप कर उनके योग को नाप की स्थान-
संख्या से भाग दें तो उसका सम-मान होता है । इसी तरह असम लम्बाई
और गहराई के भी सम बनाना चाहिये । सम लम्बाई और चौड़ाई के
गुणनफल-रूप क्षेत्रफल को सम वेध (गहराई) से गुणा करने पर खात में
घन-हस्त का मान अर्थात् खात का घनफल होता है ।

उपपत्तिः—आयानाधारखातस्य विस्तारदैर्घ्यवेधा यदि सर्वत्र न समास्त-
दाऽनेकेषु स्थानेषु तान्निगण्य तद्युतिर्नापितस्थानसंख्यया भजनेन तेषां सम-
मितिः स्यात् । समविस्तारदैर्घ्याभ्यामायतस्य क्षेत्रफलानयनं कर्तव्यम् । एत-
त्क्षेत्रफलतुल्यानि क्षेत्राणि खाते वेधनिनान्यत इदं क्षेत्रफलं वेधगुणितं तदा
खातस्य घनफलं स्यादन उपपद्यते ।

उदाहरणम् ।

भुजवक्रतया दैर्घ्यं दशोशाकं करैर्भिनम् ।

त्रिषु स्थानेषु षट्पञ्चमप्रहम्ना च विलुतिः ॥ १ ॥

यस्य खातस्य वेधोऽपि द्विचतुस्त्रिंश्रः सत्ते ।

त्र खाते क्रियन्तः स्युर्घनहम्नान् प्रचक्ष्व मे ॥ २ ॥

किसी खात को देना होने के कारण तीन जगह की लम्बाई १०, ११
और १२ हाथ, तीन जगह की चौड़ाई ५, ६ और ७ हाथ तथा तीन स्थानों के
वेध २, २ और ४ हाथ हैं, तो उस खात का घनफल बनाओ ।

समखातफलव्यंशः सूचीखाते फलं भवति ॥ ३ ॥

मुखत्रतलत्रतद्युतित्रत्रफलैत्रयं पडभिः हृतं एवं सनं चेत्रफलं त्यान् ।
(चेत्रफलं) वेधहतं स्पष्टं वनफलं भवति । समखातफलव्यंशः सूचीखाते फलं
भवति ।

त्रिस्र खात में मुख की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से तल की लम्बाई
और चौड़ाई के बराबर नहीं हो, उस खान में मुख के चेत्रफल, तल के
चेत्रफल और मुख की लम्बाई तथा चौड़ाई में क्रम से तल की लम्बाई और
चौड़ाई को जोड़ने पर जो चेत्रफल हो, इन तीनों के योग को ६ से भाग
देने पर सन चेत्रफल होता है । इसको वेध से गुणा करने पर खान का स्पष्ट
वनफल होता है । सम खात के वनफल का ३ सूची खान का वनफल
होता है ।

उपपत्ति:—यस्मिन् खाते मुखायतस्य दैर्घ्यविस्तारान्यां तलायतस्य दैर्घ्य-
विसृतिमानेऽल्पे तत्र तलदैर्घ्यविस्तारान्यां स्वस्वामिमुखभूतलयोः समानान्तर-
धरानलकरणेनैकायताधारिका सूची, तत्पार्थं द्वे त्रिभुजाधारखानचेत्रे तथा
तलायताधारं समखातचेत्रमिति चेत्रत्रनुष्टयं सन्नायते । अत्र कल्प्येते मुखायतस्य

दैर्घ्यविसृती क्रमेण दै, वि, तथा तलायतस्य

दैर्घ्यविसृती क्रमेण दै वि एवं वेधः = वे ।

तेनायताधारसूच्या आधारस्य दैर्घ्यम् =

(दै-दै'), तथा विसृति=(वि-वि') ।

एवं त्रिभुजाधारखानयोराधारयोदैर्घ्ये, दै,

वि', तथा तयोर्विसृती क्रमेण (वि-वि'),

(दै-दै') । ततः सूचीवनफलविधिना-

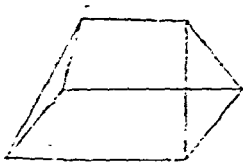
यनाधारसूच्या वनफलम् = $\frac{(वि-वि') (दै-दै') वे}{३}$ । त्रिभुजाधारखानयोर्वनफले-

क्रमेण $\frac{(वि-वि') दै}{३} + \frac{(दै-दै') वि}{३} \times वे$ । तथा तलायताधारसमखानस्य

वनफलम् = वि × दै' × वे । सर्वेषां योगोऽर्थाष्टखानस्य वनफलम्

= $\frac{(वि-वि') (दै-दै') वे}{३} + \frac{(वि-वि') दै \cdot वे}{३} + \frac{(दै-दै') वि \cdot वे}{३}$

+ वि × दै' × वे

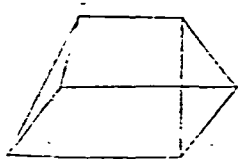


समस्वातफलव्यंशः सूचीस्वाते फलं भवति ॥ ३ ॥

मुत्रत्रतलत्रतद्युतिजत्रेफलैत्रयं पडभिः हनं एवं सनं चेत्रफलं स्यात् ।
(चेत्रफलं) वेधहतं स्पष्टं घनफलं भवति । समस्वातफलव्यंशः सूचीस्वाते फलं
भवति ।

जिस स्वात में मुख की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से तल की लम्बाई और चौड़ाई के बराबर नहीं हो, उस स्वात में मुख के चेत्रफल, तल के चेत्रफल और मुख की लम्बाई तथा चौड़ाई में क्रम से तल की लम्बाई और चौड़ाई को जोड़ने पर जो चेत्रफल हो, इन तीनों के योग को ६ से भाग देने पर सन चेत्रफल होता है । इसको वेध से गुणा करने पर स्वात का स्पष्ट घनफल होता है । सम स्वात के घनफल का $\frac{1}{3}$ सूची स्वात का घनफल होता है ।

उपपत्तिः—यस्मिन् स्वाते मुखायतस्य दैर्घ्यविस्ताराभ्यां तलायतस्य दैर्घ्य-
विलूतिमानेऽप्ये तत्र तलदैर्घ्यविस्ताराभ्यां स्वस्वाभिमुखभूतलयोः समानान्तर-
धरातलकरणैकैकायताधारिका सूची, तस्यार्थं द्वे त्रिभुजाधारस्वानचेत्रे तथा
तलायताधारं समस्वातचेत्रनिति चेत्रत्रमुष्टयं सञ्जायते । अत्र कल्प्यते मुखायतस्य



दैर्घ्यविलूती क्रमेण द्वै, वि, तथा तलायतस्य
दैर्घ्यविरलूती क्रमेण द्वै वि एवं वेधः = वे ।
तेनायताधारसूच्या आधारस्य दैर्घ्यम् =
(द्वै-द्वै), तथा विलूति=(वि-वि) ।
एवं त्रिभुजाधारस्वानचोराधारयोर्दैर्घ्ये, द्वै,
वि, तथा तयोर्विलूती क्रमेण (वि-वि),
(द्वै-द्वै) । ततः सूचीघनफलविधिना-

यताधारसूच्या घनफलम् = $\frac{(वि-वि')(द्वै-द्वै')वे}{३}$ । त्रिभुजाधारस्वानचोर्धनफल-

क्रमेण $\frac{(वि-वि')द्वै' \times वे}{३} + \frac{(द्वै-द्वै')वि \times वे}{३}$ । तथा तलायनाधारसमस्वानच्य

घनफलम् = वि \times द्वै' \times वे । सर्वेषां योगोऽर्भीष्टस्वानच्य घनफलम्

= $\frac{(वि-वि')(द्वै-द्वै')वे}{३} + \frac{(वि-वि')द्वै'वे}{३} + \frac{(द्वै-द्वै')विवे}{३}$

+ वि \times द्वै' \times वे

$$= \frac{\text{सु.रै} \times \text{सु.वि.}}{n \times n} = \frac{\text{सु.फ.}}{n^2} \text{। इदं वेद्येना } \frac{\text{अ प}}{n} \text{ ते न गुणितं त्रातं प्रथम}$$

$$\text{चण्डस्य घनफलम्} = \frac{\text{सु.फ.}}{n^2} \times \frac{\text{अ प}}{n} = \frac{\text{सु.फ.} \times \text{अ प}}{n^3} \text{। एवं द्वितीयचण्डस्य देव्यन्त}$$

$$= \frac{\text{सु.रै} \times २ \text{ अ प}}{\text{अ प} \times n} = \frac{\text{सु.रै} \times २}{n} \text{। द्वितीयचण्डस्य विन्मृतिः} = \frac{\text{सु.वि} \times २ \text{ अ प}}{\text{अ प} \times n}$$

$$= \frac{\text{सु.वि} \times २}{n} \text{। } \therefore \text{द्वितीयचण्डस्य क्षेत्रफलम्} = \frac{\text{सु.रै} \times २}{n} \times \frac{\text{सु.वि} \times २}{n}$$

$$= \frac{४ \text{ सु.फ.}}{n^2} \text{। } \therefore \text{द्वितीयचण्डस्य घनफलम्} = \frac{४ \text{ सु.फ.}}{n^2} \times \frac{\text{अ प}}{n}$$

$$= \frac{४ \text{ सु.फ.} \times \text{अ प}}{n^3} \text{। एवंनेव तृतीयचण्डस्य देव्यविन्मृती क्रमेण} = \frac{\text{सु.रै} \times ३}{n}$$

$$\frac{\text{सु.वि} \times ३}{n} \text{। } \therefore \text{तृतीयचण्डस्य क्षेत्रफलम्} = \frac{९ \text{ सु.फ.}}{n^2} \text{। } \therefore \text{तृतीयचण्डस्य}$$

$$\text{घनफलम्} = \frac{९ \text{ सु.फ.}}{n^2} \times \frac{\text{अ प}}{n} = \frac{९ \text{ सु.फ.} \times \text{अ प}}{n^3} \text{। एवंनेऽपि । अथान्तिम-$$

$$\text{चण्डस्य घनफलम्} = \frac{n^2 \times \text{सु.फ.} \times \text{अ प}}{n^3}$$

नवेषां घनफलानां योगः = सूचीघनफलम् ।

$$= \frac{(\text{सु.फ.} + ४ \text{ सु.फ.} + ९ \text{ सु.फ.} + १६ \text{ सु.फ.} + \dots + n^2 \times \text{सु.फ.}) \text{ अ प}}{n^3}$$

$$= \frac{\text{सु.फ.} \times \text{अ प}}{n^3} (१ + ४ + ९ + १६ + \dots + n^2) \text{। अत्र अ प}$$

$$= \text{सूचीवेद्यस्तथा} (१ + ४ + ९ + १६ + \dots + n^2) = \text{एकचक्रानां कृति-}$$

$$\text{योगः} = \frac{(२ न + १)}{३} \left(\frac{न + १}{२} \right) न \text{।}$$

$$\therefore \text{सूचीघनफलम्} = \frac{\text{सु.फ.} \times \text{वे} (२ न + १) (न + १) न}{६}$$

$$= \frac{\text{सु.फ.} \times \text{वे} (२ न^२ + ३ न + १)}{६}$$

$$= \frac{\text{सु.फ.} \times \text{वे}}{६} \left(\frac{२ न^२}{३ न^२} + \frac{३ न}{३ न^२} + \frac{१}{३ न^२} \right) = \text{सु.फ.} \times \text{वे} \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{३ न} + \frac{१}{३ न^२} \right)$$

द्वितीयोदाहरणम् ।

खातेऽथ तिग्मकरतुल्यचतुर्भुजे च
 किं स्यात् फलं नवनितः किल यत्र वेधः ।
 वृत्ते तथैव दशविस्तृतिपञ्चवेधे
 सूचीफलं वद तयोश्च पृथक्-पृथक् ने ॥ २ ॥

जिस मुख्य चतुर्भुज खान की भुजा १२ और वेध २ है उसका वन फल बताओ । एवं जिस वृत्त का व्यास १० और वेध ५ है, उसका वनफल बताओ और उन दोनों क्षेत्र का सूची वनफल अलग-अलग कहो ।

न्यासः

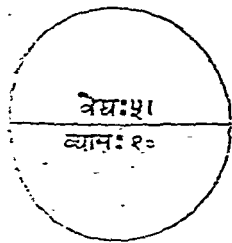


भुजः १२ । वेधः ६ । जातं यथोक्तकरणेन खात-

२२ फलं वनहस्ताः १२६६ । सूचीफलं ७३२

वृत्तखातदर्शनाय

न्यासः



व्यासः १० । वेधः ५ । अत्र सूक्ष्मपरिविः
 $\frac{३९२७}{५३२२}$ । सूक्ष्मक्षेत्रफलम् $\frac{३९२७}{५३२२}$ । वेधगुणं
 जातं खातफलम् $\frac{३९२७}{५३२२}$ । सूक्ष्मसूचीफलम्
 $\frac{३९२७}{५३२२}$ । यथा स्थूलखातफलम् $\frac{३७५३}{५३२२}$ ।
 सूचीफलं स्थूलं वा $\frac{३७५३}{५३२२}$ ।

इति खातव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—यहाँ मुख्य चतुर्भुज (वर्गाकार) खान की भुजा १२ है, अतः उसका क्षेत्रफल = $१२^२ = १४४$ हुआ । इसको वेध २ से गुणा करने पर $१४४ \times २ = २८८$ खान वनफल हुआ । इसको ३ से भाग देने पर $२८८ \div ३ = ९६$ सूची वनफल हुआ । वृत्त के व्यास १० को व्यासे भक्त्यासिद्धते' इस सूत्र के अनुसार, ३९२७ से गुणा कर १२५० से भाग देने

प्रतिप्रिकोच्छ्रित्या यद्येकः स्तरस्तदा चित्युच्छ्रित्या किमिति ज्ञानं स्तरानाम्

$$= \frac{१ \times \text{चि. उ.}}{\text{इ. उ.}} = \frac{\text{चि. उ.}}{\text{इ. उ.}}$$
 इत्युपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

अष्टादशाङ्गुलं दैर्घ्यं विस्तारो द्वादशाङ्गुलः ।

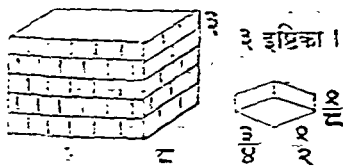
उच्छ्रितिस्यङ्गुला यस्यामिष्टिकास्ताश्चितौ किल ॥ १ ॥

यद्विस्तृतिः पञ्चकराष्टहस्तं दैर्घ्यञ्च यस्यां त्रिकरोच्छ्रितित्र्य ।

तस्यां चित्तौ किं फलमिष्टिकानां सङ्ख्या च का ब्रूहि कति स्तराश्च ॥२॥

किसी चिति में प्रत्येक ईंट की लम्बाई, चौड़ाई और उँचाई क्रम से १८ अंगुल, १२ अंगुल और ३ अंगुल हैं । यदि उस चिति की चौड़ाई, लम्बाई और उँचाई क्रम से ५, ८ और ३ हाथ हों, तो उसमें ईंट की संख्या और पट्टि कितनी है यह बताओ ।

न्यासः इष्टिकाचितिः ।



इष्टिकाया वनहस्तानाम् ईदृ
 चितेः क्षेत्रफलम् ४० । उच्छ्रियेण
 ३ गुणितं चितेर्यनफलं १२० ।
 लब्धा २५६० इष्टिकासंख्याः ।
 स्तरसंख्याः २४ । एवं पायाण-
 चितायां प ।

इति चितिव्यवहारः ।

उदाहरण—यहाँ चिति की लम्बाई ८ हाथ को उसकी चौड़ाई ५ हाथ से गुणा करने पर $८ \times ५ = ४०$ व. हाथ चिति का क्षेत्रफल हुआ । इनको चिति की उँचाई ३ हाथ से गुणा कर $४० \times ३ = १२०$ घन हाथ चिति का घनफल हुआ । अब एक ईंट की लम्बाई १८ अंगुल को २४ से भाग देने पर $\frac{१८}{२४} = \frac{३}{४}$ हाथ उसकी लम्बाई हुई । इसी तरह ईंट की चौड़ाई १२ अंगुल और उँचाई ३ अंगुल को २४ से भाग देने पर चौड़ाई का हस्तात्मक मान $= \frac{१२}{२४} = \frac{१}{२}$, तथा उँचाई का हस्तात्मक मान $\frac{३}{२४} = \frac{१}{८}$ हुए । अब ईंट की लम्बाई, चौड़ाई और उँचाई का बात करने पर $\frac{३}{४} \times \frac{१}{२} \times \frac{१}{८} = \frac{३}{६४}$ घन हाथ एक ईंट का घनफल हुआ । चिति के घनफल १२० में ईंट के घनफल $\frac{३}{६४}$ से भाग देने पर $१२० \div \frac{३}{६४} = \frac{१२० \times ६४}{३} = २५६०$ ईंटों की संख्या हुई । चिति

यदि उसकी लम्बाई १०० अंगुल हो और वह ४ जगह चौरी गई हो, तो हे मित्र ! उसका हस्तात्मक नाम शीघ्र बताओ ।

न्यासः ।

पिण्डयोगद्वलं १८ वैश्वेन



१०० सङ्कुणितम्

१८०० । शकृदा-

रणपथै (४) गु-

णितम् ७-०० ।

१००

पद्वरेषु ५७६ विद्वृतं जातं करात्मकं गणितम् ३५ ।

उदाहरण—यहाँ मूल की मुटाई २० अंगुल और अग्र की मुटाई १६ अंगुल है, तो सूत्र के अनुसार इन दोनों के योगार्थ $20 + 16 = 36 = 3 \times 12 = 12$ अंगुल को लकड़ी की लम्बाई १०० अंगुल से गुणा करने पर $12 \times 100 = 1200$ वर्गाङ्गुल हुआ । इसको दारण पथ ४ से गुणा करने पर फल $1200 \times 4 = 4800$ वर्गाङ्गुल हुआ । इनको ५७६ से भाग देने पर $\frac{4800}{576} = 8\frac{1}{3}$ वर्ग हाथ फल हुआ ।

ऋकचान्तरे करणसूत्रं सार्यवृत्तम् ।

द्विद्यते तु यदि तिर्यगुक्तवत् पिण्डविस्तृतिहतेः फलं तदा ॥ ३ ॥

इष्टिकाचितिदृषत्तिखातक्राकचव्यवहर्ता खलु मूल्यम् ।

कर्मकारजनसम्प्रतिपत्त्या तन्मृदुत्वकठिनत्ववशेन ॥ ४ ॥

यदि तु तिर्यक् द्विद्यते तदा उक्तवत् पिण्डविस्तृतिहतेः फलं स्यात् । इष्टिका-
चितिदृषत्तिखातक्राकचव्यवहर्ता खलु तन्मृदुत्वकठिनत्ववशेन कर्मकारजन-
सम्प्रतिपत्त्या मूल्यं भवतीति ।

यदि लकड़ी को निरखी अथवा चौड़ाई के रूप में चौरी जाय, तो 'पिण्डयोगद्वलनप्रमूलयोः' इस सूत्र के अनुसार मुटाई को लकड़ी की चौड़ाई से गुणा करने पर फल होता है । ईंटे की चिति पत्थर की चिति, खात और ऋकच व्यवहार में कारीगर (काम करने वाले) की योग्यता तथा उन वस्तुओं की कोमलता एवं कठिनता के अनुसार मूल्य होता है ।

षडशोः वेधः स्यात्, शूकधान्येषु परिधिब्रमभोगः वेधः भवति । परिधि-
वर्गिते वेधनिघ्ने सति वनगणितकराः स्युः, ताः मानधाः स्वार्थः च स्युः ।
नोट धान के ढेर में परिधि का $\frac{1}{3}$ वेध होता है । छोटे धान के ढेर में
धि का $\frac{1}{4}$ और शूक-धान में परिधि का $\frac{1}{5}$ वेध होता है । परिधि के ढेर
न के वर्ग को वेध से गुणा करने पर वन-हस्त का मान होता है, जो नगध
में नारी कहलाती है ।

उपपत्ति — अथ स्थूलमूक्षशूकधान्येषु क्रमेण परिधिदशमैकादशानवन,
तो वेधो भवतीत्यत्रोपलब्धिरेव प्रमाणम् । यदि धान्यराशोः परिधिः = प,

एवं तस्मिन्-संगुण्यः द्वाविंशत्या भक्तं ज्ञातं स्थूलव्याप्तमानम् = $\frac{प \times ७}{३}$
 $\frac{५}{३}$, स्वस्थान्तरात् । ततः परिधिगुणितव्याप्तपादः फलमित्यादिना क्षेत्रफलम्
 $\frac{५ \times ५}{३} = \frac{५ \times ५}{३} = \frac{५^२}{३}$ । इदं क्षेत्रफलं वेधेन गुणितं ज्ञातं समवनफलम्
 $\frac{५^२}{३} \times \frac{३}{५} = ५^२ \times \frac{३}{५} = \frac{५^२ \times ३}{५} = (५) \times ३$,
धान्यराशोर्वनहस्तप्रमाणम् । इदमेव नान्यदेशान्तराति परिभाषया स्पष्टमत
स्यन्नम् ।

उदाहरणम् ।

समभुवि किल राशिर्यः स्थितः स्थूलधान्यः
परिधिपरिमितः स्याद्वस्तुपट्टिर्वदीयाः ।
प्रवद गणक स्वार्थः किं मिताः सन्ति तस्मि-
न्नयः पृथगणुधान्यैः शूकधान्यैश्च शीघ्रम् ॥ १ ॥

हे गणक, समतल भूमि में स्थित स्थूल, मूक्ष और शूक धान्य, तीनों के
र की परिधि ६० हाथ है, तो इनकी नारियों के मान अलग-अलग बनाओ ।

अथ स्थूलधान्यराशिमानावबोधनाय—

यासः ।

६०

परिधिः ६० । वेधः ६ । परिधेः
षडशोः १० । वर्गितः १०० । वेध-
६ निघ्नः । लब्धाः स्वार्थः ६०० ।

धान के डेर की परिधि को क्रम से २, ५ और $\frac{1}{2}$ से गुणा कर उन पर से जो फल हों उनको अपने-अपने गुणक से भाग देने पर वास्तव फल होते हैं ।

उपपत्तिः—अथ भित्त्यन्तर्वाहिक्रोणस्थधान्यराशीनां परिधयः वास्तवपरिधानां क्रमेणार्धांशचतुर्थांशत्रिगुणितचतुर्थांशसमा भवन्तीति स्पष्टनेवातो भित्त्यादिलग्नपरिधीन् प्रथमं क्रमेण द्विवेदचतुर्गुणितत्र्यंशैः संगुण्य तेभ्यः पूर्वोक्तप्रकारेण यानि फलानि तानि द्विवेदचतुर्गुणितत्र्यंशान्कान्यर्भाष्ट फलानि भवन्तीति किं चित्रम् ।

उदाहरणम् ।

परिविर्मित्तिलग्रस्य राशेर्विशतक्रः किल ।

अन्तःक्रोणस्थितस्यापि तिथितुल्यक्रः सखे ॥ १ ॥

बहिष्क्रोणस्थितस्यापि पञ्चद्विनवसन्मितः ।

तेषामाचक्ष्व मे क्षिप्रं घनहस्तान् पृथक् पृथक् ॥ २ ॥

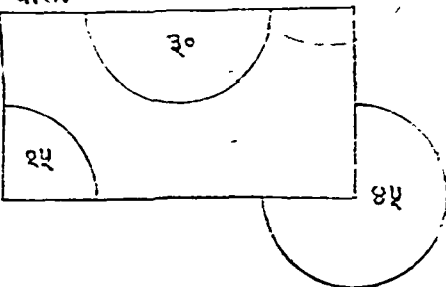
हे मित्र, दीवार में लगे हुये धान के डेर की परिधि ३० हाथ, तथा वर के भीतर और बाहर के कोने में लगे हुये डेर की परिधि क्रम से १५ और ४५ हाथ हैं, तो उनके घनहस्त अलग-अलग शीघ्र बताओ ।

अत्रापि स्थूलादिवान्यानां राशिमानाववोवनाय स्पष्टं क्षेत्रत्रयम् तत्रादावनगुणान्यराशिमानाववोवकं क्षेत्रम् ।

न्यासः ।

अत्राद्यस्य परिधिः (३०) द्विनिघ्नः ६० ।

न्यासः



अन्यः १५ चतुर्वर्गः

६०। अपरः ४५। सत्रि-

भागैकं $\frac{1}{2}$ निघ्नः ६० ।

एषां वेद्यः ६। एभ्यः

फलं तुल्यमेतावत्य एव

स्वायं ६०० । एतत्स्व-

स्वगुणेन भक्तं जातं पृ-

थक्पृथक्फलम् ३००।

१५०। ४५० ।

परिधि का दशमांश = $\frac{1}{10}$ = ६ हाथ बंध हुआ । 'परिधिपष्टे वर्गिते बंधनिष्ठे' इसके अनुसार परिधि ६० के पष्टांश १० के वर्ग १०० को बंध ६ से गुणा करने पर $1000 \times 6 = 600$ स्वारियाँ हुईं । इसको अरने-अरने गुणक अर्थात् २, ४ और $\frac{1}{2}$ से अलग-अलग भाग देने पर द्वीवार में लगे हुये ढेर की खारी = $\frac{600}{2} = 300$ । वर के भीतर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी = $\frac{600}{4} = 150$ और घर के बाहर कोने में लगे हुये ढेर की खारी = $600 \div \frac{1}{2} = \frac{600 \times 2}{1} = 1200$ । मूक्त धान की परिधि भी उक्तरीति से क्रिया करने पर ६० हाथ ही होनी है, किन्तु इनमें परिधि के एकदशांश बंध होने के कारण $\frac{1}{10}$ बंध हुआ । अब परिधि ६० के पष्टांश १० के वर्ग १०० को बंध $\frac{1}{10}$ से गुणा कर $\frac{1000 \times 1}{10} = \frac{1000}{10}$ को २ से भाग देने पर द्वीवार में लगे हुये ढेर की खारी = $\frac{1000}{2} = 500$ = २०२ $\frac{1}{2}$ हुई । फिर $\frac{1000}{10}$ को ४ से भाग देने पर भीतर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी = $\frac{1000}{4} = 250$ = १२६ $\frac{1}{2}$ हुई और $\frac{1000}{10}$ को $\frac{1}{2}$ से भाग देने पर बाहर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी = $\frac{1000}{\frac{1}{2}} = \frac{1000 \times 2}{1} = 2000$ = ४०९ $\frac{1}{2}$ हुई । इसी प्रकार उदाहरण में दी गई परिधियों को २, ४ और $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर गूक-धान की परिधि भी ६० हाथ हुई । अब इस परिधि का नवमांश $\frac{1}{9}$ = $\frac{1}{9}$ बंध हुआ । परिधि ६० के पष्टांश १० के वर्ग १०० को, बंध $\frac{1}{9}$ से गुणा कर $\frac{1000 \times 1}{9} = \frac{1000}{9}$ को २ से भाग देने पर द्वीवार में लगे हुये ढेर की खारी = $\frac{1000}{18} = 55$ = २२ $\frac{2}{3}$ हुई । $\frac{1000}{9}$ को ४ से भाग देने पर $\frac{1000}{36} = 27$ = १६ $\frac{2}{3}$ वर के भीतर के कोने में लगे हुये ढेर का फल हुआ । इसी प्रकार $\frac{1000}{9}$ को $\frac{1}{2}$ से भाग देने पर बाहर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी = $\frac{1000}{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{9} = \frac{2000}{9} = 222$ = ५०० हुई ।

इति राशिच्यवहारः समाप्तः ।

अथ द्वायाच्यवहारे करणसूत्र वृत्तम् ।

छाययोः कर्णयोरन्तरं ये तयोर्वर्गविश्लेषभक्ता रसाद्रीपवः ।

सैकलव्येः पदध्वं तु कर्णान्तरं भान्तरेणोनयुक्तं दले स्तः प्रभे ॥

छाययोः कर्णयोः अन्तरेयं स्तः तयोः वर्गविश्लेषभक्ता रसाद्रीपवः, सैकलव्येः परध्वं तु कर्णान्तरं भान्तरेण अनयुक्तं दले प्रभे स्तः ।

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right) - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

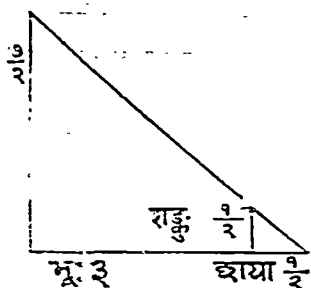
$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

अतः प्रमाणित है।

प्रमाणित है कि $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ।

न्यासः ।



शङ्कुः ३ । प्रदीपशङ्कुतलान्तरम् ३
अनयोर्घातः ३ । विनरदीपशिखी
च्छेन ३ भक्तो लघ्वानि द्वया-
ङ्कुलानि १२ ।

उदाहरण—यहाँ शङ्कु १२ अंगुल, अर्थात् ($३\frac{३}{२}$ हाथ =) $\frac{३}{२}$ हाथ है, तो सूत्र के अनुसार शङ्कु $\frac{३}{२}$ हाथ को, दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि $\frac{३}{२}$ हाथ से गुणा कर ($\frac{३}{२} \times \frac{३}{२} =$) $\frac{९}{४}$ को, दीपशिखा की उँचाई ($३\frac{३}{२}$ हाथ =) $\frac{३३}{२}$ हाथ में, शङ्कु $\frac{३}{२}$ हाथ को घटा कर शेष ($\frac{३३}{२} - \frac{३}{२} = \frac{३०}{२} =$) ३ हाथ से भाग देने पर ($\frac{३०}{२} \div ३ =$) $\frac{१०}{२}$ हाथ = १२ अंगुल दया हुआ ।

अथ दीपोच्छ्रित्यानयनाय करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

द्वयाहते तु नरदीपतलान्तरक्षे शङ्कौ भवेन्नरयुते खलु
दीपकौच्छ्रयम् । २ ॥

नरदीपतलान्तरक्षे शङ्कौ द्वयाहते तु नरयुते सति खलु दीपकौच्छ्रयं भवति ।

शङ्कु को दीपतल और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि से गुणा करें और दया से भाग दें; लघ्वि में शङ्कु को जोड़ने पर दीप की उँचाई होनी है ।

उपपत्तिः—शङ्कु प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरक्षेद्येत्यादिन्त्रोपपत्तौ व प क,

क द स त्रिसुत्रयोः साजात्यादनुपातेन व प = $\frac{द क \times प क}{द स}$ वा अ व - अ प

= $\frac{द क \times अ द}{द स}$, वा दीपौच्छ्रयम् - शङ्कु = $\frac{शङ्कु \times नरदीपतलान्तर}{द्वया}$

∴ दीपौच्छ्रयम् = $\frac{शङ्कु \times नरदीपतलान्तर}{द्वया} + शङ्कु$ अत उपपन्नम् ।

उपपत्तिः—शङ्कुः प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरद्वयव्यादिमुत्रत्योपपत्तौ व प क,

क द स त्रिभुजयोः सात्रात्यादनुपातेन - प क = $\frac{द स \times व प}{क द}$, वा, अ द

= $\frac{द स \times (अ व - अ प)}{क द} = \frac{द स (अ व - क द)}{क द}$ वा, दीपनरान्तर

द्वया $\times \left(\frac{\text{दीपोच्छ्रिति - शङ्कु}}{\text{शङ्कु}} \right)$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

पूर्वोक्त एव द्विपोच्छ्रयाः $\frac{११}{४}$ । शङ्कुवज्जुलानि १२ । छाया १६ ।

लम्बाः शङ्कुप्रदीपान्तरहस्ताः ३ ।

उदाहरण—यहाँ पूर्वोक्त दीप की उँचाई $\frac{११}{४}$ हाथ, शङ्कु १२ अंगुल अर्थात् $\frac{३}{४}$ हाथ और छाया १६ अंगुल अर्थात् $\frac{३}{४}$ हाथ हैं, तो सूत्र के अनुसार दीप की उँचाई $\frac{११}{४}$ हाथ में शङ्कु $\frac{३}{४}$ हाथ को घटा कर शेष $(\frac{११}{४} - \frac{३}{४}) = \frac{८}{४}$ हाथ से, छाया $\frac{३}{४}$ हाथ को गुणा कर $\frac{३}{४} \times \frac{८}{४} = \frac{३}{४}$ व हाथ को, शङ्कु $\frac{३}{४}$ हाथ से भाग देने पर $\frac{३}{४} \div \frac{३}{४} = \frac{३}{४} \times \frac{४}{३}$ हाथ = ३ हाथ, दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि का मान हुआ ।

छायाप्रदीपान्तरदीपोच्छ्रयानयनाय करणसूत्रं सार्ववृत्तम् ।

छायाप्रयोरन्तरसंगुणाभा छायाप्रमाणान्तरहृद्भूः ॥ ३ ॥

भृशङ्कुघातः प्रभया विभक्तः प्रजायते दीपशिखौच्छ्रयमेवम् ।

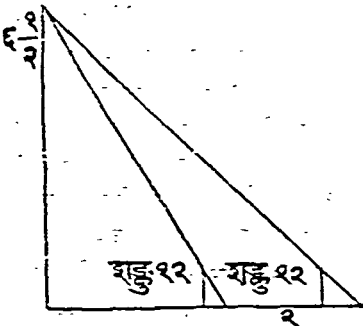
त्रैराशिकेनैव यदेतदृक्तं व्याप्तं स्वभेदैर्हरिणेव विश्वम् ॥ ४ ॥

छायाप्रयोः अन्तरसंगुणा भा छायाप्रमाणान्तरहृद् भूः भवेत् । एवं शङ्कुघातः प्रभया विभक्तः दीपशिखौच्छ्रयं प्रजायते । एतत् यत् उक्तं तत् हरिणा स्वभेदैः विश्वं इव त्रैराशिकेनैव व्याप्तम् ।

दोनों छाया के अग्र के बीच की भूमि से छाया को गुणा कर गुणनफल में दोनों छाया के अन्तर से भाग दें तो भूमि होती है । भूमि और शङ्कु के गुणन-फल को छाया से भाग देने पर दीप-शिखा की उँचाई होती है । जिस प्रकार भगवान् विष्णु के नेद से यह संसार व्याप्त है, उसी प्रकार ये सभी गणित त्रैराशिक के नेद से व्याप्त हैं ।

हे नुनते, १२ अंगुल के शङ्कु की द्वाया ८ अंगुल पाई गई, फिर उसी शङ्कु को द्वाया के अग्र की ओर २ हाथ भागे करके रखने से दूसरी द्वाया १६ अंगुल हुई, तो यदि नुन द्वायाव्यवहार जानते हो, तो द्वाया के अग्र और शङ्कु के बीच की भूमि तथा दीप की उँचाई बताओ ।

न्यासः ।



अत्र द्वायाग्रयोरन्तरमङ्कु
लात्मकम् १२ । द्वाये च ८ ।
१२ । अनयोराद्या ८ । इयमनेन
१२ गुणिता ४१६ । द्वायाप्रमा-
णान्तरेण ४ भक्त्वा लब्धं भूमा-
नम् १०४ । इदं प्रथमच्छाया
प्रदीपतलयोरन्तरमित्यर्थः । एवं
द्वितीयच्छायाग्रान्तरभूमानम्

भूः १३ । द्वा ३ । भूः ३ । द्वा ३

१५६ । भूशङ्कुवातः प्रथया विभक्त इति जावमुभयतोऽपि दीपौच्छं स-
मनेव हस्ताः ६३

एवमित्यत्र द्वायाव्यवहारं त्रैराशिककल्पनयाऽऽनयते वदते । तद्यथा ।
प्रथमच्छायातो ८ द्वितीयच्छाया १२ यावताऽविक्रा तावता द्वायावयवेन
यदि द्वायाग्रान्तरतुल्या भूर्लभ्यते तदा द्वायया क्षिति वि एवं पृथक्-पृथक्
द्वायाप्रदीपतलान्तरप्रमाणलभ्यते । ततो द्वितीयं त्रैराशिकम् यदि द्वाया-
तुल्ये नुजे शङ्कुः कोटित्वदा भूतुल्ये नुजे क्षिति वि लब्धं दीपकौच्छ्यनुभ-
यतोऽपि तुल्यनेव । एवं पञ्चराशिकादिकमखिलं त्रैराशिकः कल्पनयैव
सिद्धम् । यथा भगवता श्रीनारायणेन जनननरणकलेशादहारिणा
निखिलजगज्जननैकबीजेन सकलमुवनभावनगिरिसरित्सुरनरसासुरा-
दिभिः स्वभेदैरिदं जगद्व्याप्तं तथेदमखिलं गणितजातं त्रैराशिकेन
व्याप्तम् ।

अथ कृत्के करणसूत्रं वृत्तपञ्चकम् ।

भाज्यो हारः श्लेषकक्षापवर्त्यः केनाप्यादौ सम्भवे कृत्कार्यम् ।
 येन च्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेन श्लेषश्चैतद्दृष्टमृद्विष्टमेव ॥१॥
 परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः श्लेषस्तयोः स्यादपवर्त्तनं सः ।
 तेनापवर्त्तेन विभाजितौ यौ तौ भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः ॥२॥
 मिथो भजेत् तौ दृढभाज्यहारौ यावद्विभाज्ये भवतीह रूपम् ।
 फलान्यत्रोऽथस्तदयो निवेश्यः श्लेषस्ततः गृह्यमृपान्तिमेन ॥३॥
 स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यं त्यजेन्मुहुः स्यादिति राशिधुग्मम् ।
 ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः फलं गुणः स्यादधरो हरेण ॥४॥
 एवं तदैवात्र यदा समास्ताः स्युर्लब्धयश्चेद्विपमास्तदानीम् ।
 यदागतौ लब्धिवगुणौ विशोध्यौ स्वतःश्लेषमिमास्तौ तौ स्तः ॥५॥

सम्भवे सति कृत्कार्यं केन अपि अङ्केन आदौ भाज्यः हारः श्लेषश्च अप-
 वर्त्यः । येन भाज्यहारौ छिन्नौ तेन श्लेषश्च न छिद्यः नदा एतत् उद्विष्टं दृष्टं एव ।
 परस्परं भाजितयोः ययोः संख्ययोः यः श्लेषः सः तयोः अपवर्त्तनं स्यात् । तेन
 अपवर्त्तेन विभाजितौ यौ भाज्यहारौ तौ दृढसंज्ञकौ स्तः । तौ दृढभाज्यहारौ
 नियः तावत् नजेत् यावत् विभाज्ये इह रूपं भवति । फलानि अधः अधः
 (निवेश्यानि) तदथः श्लेषः निवेश्यः ततः गृह्यं (निवेश्यम्) । उपान्तिमेन
 स्वोर्ध्वे हते अन्त्येन युते तत् अन्त्यं त्यजेत् इति मुहुः (क्रिया कार्या नदा)
 राशिधुग्मं स्यात् । ऊर्ध्वः दृढेन विभाज्येन तष्टः फलं स्यात् । अधरः हरेण तष्टः
 गुणः स्यात् । एवं तदा एव यदा अत्र लब्धयः समाः स्युः । ताः चेत् विपमाः
 तदानीं लब्धिवगुणौ यदा गतौ स्वतःश्लेषात् विशोध्यौ श्लेषमिमास्तौ तौ स्तः ।

यदि अपवर्त्तनं कीं सम्भावना हो, तो कृत्के के लिये किसी अङ्क (संख्या)
 से भाज्य, हर और श्लेष तीनों को पहले अपवर्त्तन देना चाहिये । जिस संख्या
 से भाज्य एवं हर में अपवर्त्तन लगे और उससे श्लेष में अपवर्त्तन (निःश्लेष
 भाग) न लगे, तो उस उदाहरण को ही अष्टुद् समझें । जिन दो संख्याओं में

$$\text{पुनर्यादि } \frac{३}{५} = ल + ०, \text{ तदा } द = ल \times ५ \dots\dots\dots (३)$$

अत्र 'प' अनेन 'द' निरशेषं भवति तेन (१) (२) स्वरूपयोरपि 'प' अनेन निरशेषभवनात् 'अ' 'व' अनयोः 'प' अपवर्त्तनाद्, स च (२) स्वरूपावलोकनेन महत्तम इति स्फुटं तेन 'परस्परं भाजिनयोर्योरित्युपपन्नम् ।' तत्रैव (२) स्वरूपावलोकनेन स्फुटं ज्ञायते यत् अ व अनयोः 'प' ततोऽधिकं महदपवर्त्तनं न स्यादत एव महत्तमापवर्त्तनाङ्केन अर्द्धं भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः इति समीचीनम् । दृढहरभाज्ययोर्मियो भजनादन्ते रूपतुल्यमेव शेषं स्यादन्यथा पुनरपवर्त्तनप्रसंगः संभवत्यनो यावद्विभाज्ये भवतीह रूपमिति युक्तियुक्तम् ।

अथ गुगलच्छोरानयने विचारः—

कल्प्यते भाज्यः = १०३, हारः = ७१, त्रेपः = ३, तत्र गुणकः = ५,
 लब्धिः = क, तदा कुट्टकोक्त्या लब्धिः = क = $\frac{५ \times १०३ + ३}{७१}$
 $= \frac{५ \times १०३ + ५ \times ३१ + ३}{७१} = २ य + \frac{३१ य + ३}{७१} = २ य + नी,$
 $\therefore नी = \frac{३१ य + ३}{७१}, \therefore य = \frac{७१ नी - ३}{३१} = २ नी + \frac{९ नी - ३}{३१}$
 $= २ नी + पी, \therefore पी = \frac{९ नी - ३}{३१}, \therefore नी = \frac{३१ पी + ३}{९}$
 $= ३ पी + \frac{४ पी + ३}{९} = ३ पी + लो, \therefore लो = \frac{४ पी + ३}{९}$
 $\therefore पी = \frac{९ लो - ३}{४} = २ लो + \frac{लो - ३}{४} = २ लो + ह,$
 $\therefore ह = \frac{लो - ३}{४}, \therefore लो = \frac{४ ह + ३}{४} = ४ ह + ३$

इदमनिष्टं लोहितकमानम् । अत्र विडोमकोत्थापनेन या, का नाने आग-
 निष्यतः । आचार्येणाङ्कलाघवार्यं हरितकमानं गृह्यं कल्पितमतो लो = ३,
 $\therefore पी = २ ३ + ततः नी = २ (२ ३ + ०) + ३, ततः$
 $य = २ \{ ३ (२ ३ + ०) + ३ \} + २ ३ + ०,$
 एवं विडोमकोत्थापनात्-

पस्तदधः शून्यं निवेश्यमिति जाता वल्ली ६ । उपान्तिमेन स्वोर्ध्वं हते

०

इत्यादि करणेन जातं राशिद्वयम् ३२ एतौ दृढभाज्यहाराभ्यां ३५ तष्टौ
जातौ लब्धिगुणौ ६।५ इष्टाद्वयस्वस्वहरेण युक्ते इति वक्ष्यमाणविधिनै-
वाविष्टगुणितस्वतक्षणयुक्तौ वा लब्धिगुणौ २३ । २० । द्विकेनेष्टेन वा
४०।३५ । इत्यादि ।

उदाहरण—भाज्य २२१, हार १९५ और चेष ६५ है, तो भाज्य और
हार का महत्तनापवर्त्तन निकालने पर १३ हुआ । इससे भाज्य २२१, हार
१९५ और चेष ६५ को अपवर्त्तन देने से दृढ़ भाज्य १७, दृढ़ हार १५ और
चेष ५ हुये । अब दृढ़ भाज्य और हार को परस्पर भाग देने से प्रथम लब्धि १,
शेष २ से १५ को भाग देने पर द्वितीय लब्धि ७, शेष १ हुआ, अब आगे
की क्रिया सूत्र के अनुसार नहीं की गयी । प्रथम लब्धि १ के नीचे द्वितीय
लब्धि ७ को रत्न कर उसके नीचे चेष ५ को और चेष के नीचे शून्य लिखने
से वली हुई, जो मूल में लिखी है । अब उपान्तिमेन स्वोर्ध्वं हते इस सूत्र के
अनुसार वली के उपान्तिम अङ्क ५ से उसके ऊपर वाले अङ्क ७ को गुणाकर
उसमें अन्तिम अङ्क शून्य को जोड़ने से ३५ हुआ । फिर ३५ से अपने ऊपर
वाले अङ्क १ को गुणा कर उसमें अन्तिम अङ्क ३५ के नीचे के ५ को जोड़ने
से ४० हुआ । इस तरह वली पर से दो राशियाँ ४०, ३५ हुईं । इन दोनों को
दृढ़ भाज्य १७ और हार १५ से भाग देने पर क्रम से शेष ६ लब्धि और
५ गुणक हुये । अब इष्ट १ से दृढ़ भाज्य १७ और दृढ़ हार १५ को गुणा कर
गुणनफलों में क्रम से आवे हुये लब्धि ६ और गुणक ५ को जोड़ने से दूसरी
लब्धि २३ और गुणक २० हुये । इसी तरह २ इष्ट पर से लब्धि ४० और
गुणक ३५ होते हैं ।

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं वृत्तम् ।

भवति कुट्टविधेर्युतिभाज्ययोः समपवर्त्तितयोरपि वा गुणः ।

भवति यो युतिभाज्ययोः पुनः स च भवेदपवर्त्तनसंगुणः ॥ ६ ॥

समपवर्त्तितयोः अपि युतिभाज्ययोः कुट्टविधेः गुणः भवति । तत्र अपवर्त्तनेन

उदाहरणम् ।

शतं दत्तं येन युतं नवत्या विवर्जितं वा विद्वृतं त्रिपष्टया ।

निरग्रकं स्याद्वद् ने गुणं तं स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि ॥ १ ॥

बद् गुणक बनाओ जिससे १०० को गुणा कर उस गुणनफल में ९० जोड़ कर या घटा कर ६३ से भाग देने पर निरशेष हो जाना है ।

न्यासः भाज्यः १०० । हारः ६३ । ज्ञेयः ९० ।

जाना पूर्ववल्लिचि
ज्ञेयाणां वल्ली,

उपान्तिनेन स्वोर्व्वे हतेऽन्त्येन युत
इत्यादिकरणेन जातं राशिद्वयम् ।
३६३ः । जातौ पूर्ववल्लिचिगुणौ ३० ।
१२ । अथवा भाज्यज्ञेयौ दशभि-

रपवर्त्त्य भाज्यः १० । ज्ञेयः ९ । परस्परभजनाल्लघ्वानि फलानि ज्ञेयः
शून्यं चाधोऽधो निवेश्य जाता—

वल्ली

पूर्ववल्लघ्वयो गुणः ५५ । अत्र लघ्विनं
आह्या । यतो लघ्वयो विषमा जाताः अतो
गुणः ५५ न्वनश्लणादस्मा ६३ द्विशोविनो

जातो गुणः स एव १२ गुणलभाज्ये ज्ञेय ९० युते हर-६३ भक्ते लघ्विच
३० । अथवा हारज्ञेयौ ६३ः९० नवभिरपवर्त्तिता जातौ हारज्ञेयौ ७१०।

अत्र लघ्वि- ३० { लघ्वो गुणः २ । ज्ञेयद्वारापवर्त्तने ६ गुणितो जातः
ज्ञेयाणां वल्ली ० { स एव गुणः १२ । भाज्यमात्रकज्ञेयभ्यो लघ्विच
३० । अथवा भाज्यज्ञेयौ पुनर्हारज्ञेयौ चापवर्त्तिता
जातौ भाज्यहारौ १० । ७ । ज्ञेयः १ ।

अत्र पूर्वव- ३ / गुणश्च २ । हारज्ञेयापवर्त्तनेन गुणितो जातः स
जाता वल्ली ३ । एव गुणः १२ । पूर्ववल्लिचिश्च ३० । इष्टादतस्वस्व
हरेण युक्ते इत्यादिनाऽथवा गुणलघ्वि २१ । १३० ।

उदाहरण—भाज्य १००, हार ६३ और ज्ञेय ९० है, ये तीनों १ अङ्क को
घोड़ कर किसी दूसरे अङ्क से नहीं कटते, अतः भाज्य और हर पर से उक्त

इत्यादि रीति से ऊर्ध्वाङ्क ४३० और अधराङ्क ३० हुये । ऊर्ध्वाङ्क ४३० को वही १०० से भाग देने पर १४ $३० \times १४ + १० = ४३० =$ ऊर्ध्वाङ्क शेष ३० लब्धि और ३ $३ \times १० + ० = ३० =$ अधराङ्क अधराङ्क ३० को ३ से भाग देकर शेष २ गुणक हुये । यहाँ गुणक को

अपवर्तनाङ्क ९ से गुणा करने पर वास्तव गुणक १८ हुआ ।

अथवा—भाज्य और चेष को १० का अपवर्तन देकर फिर हार और चेष में ९ का अपवर्तन देने से भाज्य १०, हार ३ और चेष १ हुये । अब उक्त प्रकार से वही बना कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वं हते' इस रीति से ऊर्ध्वाङ्क ३ और अधराङ्क २ हुये । यहाँ ऊर्ध्वाङ्क और अधराङ्क को अपने-अपने तङ्ग से तष्टित

वही		करने पर लब्धि ३ और गुणक
१	$२ \times १ + १ = ३ =$ ऊर्ध्वाङ्क	२ हुये । अब 'भवति कुट्टविवे-
२	$२ \times १ \div ० = २ =$ अधराङ्क	र्युतिभाज्ययोः' इस सूत्र से गुणक
चेष १		२ को हार और चेष के अपवर्त्त-
०		नाङ्क ९ से गुणा करने पर वास्तव

गुणक १८ हुआ । लब्धि ३ को भाज्य और चेष के अपवर्तनाङ्क १० से गुणा करने पर ३० वास्तव लब्धि हुई । यहाँ १ इष्ट मानकर 'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' इत्यादि रीति से इष्ट १ से भाज्य १०० को गुणा कर उसमें लब्धि ३० को जोड़ने से १३० लब्धि और इष्ट से १३ को गुणा कर १८ जोड़ने से ८१ गुणक हुये ।

विशेषः—अर के गणित से गुणक १८ आया है, अतः १८ से १०० को गुणा कर उसमें ९० जोड़ कर १३ का भाग देने से निरक्षेप होता है, लेकिन ९० बढ़ा कर १३ का भाग देने पर निःशेष नहीं होता, इसलिये ऋण चेष में उक्तीति से आये हुये गुण-लब्धि को अपने-अपने तङ्ग में बढ़ाने से लब्धि और गुणक सन्नक्षना चाहिये । यहाँ १८ गुणक को अपने तङ्ग १३ में बढ़ाने से ४५ हुआ । इससे १०० को गुणा कर उसमें ९० बढ़ाने पर ४४१० को १३ से भाग देने पर निरक्षेप हुआ । इसी विधि को आगे के सूत्र से ग्रन्थकार स्पष्ट करते हैं ।

न्यासः । भाज्यः ६० हारः १३ । त्रेपः १६ ।

प्राग्वजाता वल्ली, $\begin{matrix} ५ \\ १ \\ १ \\ १ \\ ६ \end{matrix}$ } प्राग्वजाते गुणाती २ । ८ । अत्रापि ल-
 धयो विषमा अतो गुणाती स्वतक्षणाभ्यां
 ६० । १३ । शोधिते जाते ११ । ५२ । एवं
 षोडशक्षेपे । एतावेव लब्धिगुणौ ५२ । ११ । स्वहराभ्यां शोधितौ जातौ
 षोडशविशुद्धौ २ । ८ ।

उदाहरण—भाज्य ६०, हार १३ और त्रेप १६ है । यहाँ उच्चरीति से
 वली के द्वारा ऊर्ध्वाङ्क तथा अधराङ्क क्रम से ३६८ और ८० हुये । ऊर्ध्वाङ्क को
 भाज्य ६० से और अधराङ्क को हर १३ से तष्टित करने पर लब्धि ८ और
 गुणक २ हुये । किन्तु वली विषम होने से ८ और २ को अपने-अपने तन्नग में
 घटाने से धन त्रेप की लब्धि (६० - ८) = ५२ और गुणक (१३ - २) = ११
 हुए । अब ५२ और ११ को ऋणत्रेपीय लब्धि और गुणक बनाने के लिए
 अपने-अपने तन्नग में घटाने से लब्धि ८ और गुणक २ हुये ।

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं सार्धवृत्तम् ।

गुणलब्ध्योः समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलम् ॥ ७ ॥

हरतष्टे धनक्षेपे गुणलब्धी तु पूर्ववत् ।

क्षेपतक्षणलाभाद्या लब्धिः शुद्धौ तु वर्जिता ॥ ८ ॥

धीमता तन्नगे गुणलब्ध्योः फलं समं ग्राह्यम् । हरतष्टे धनत्रेपे गुणलब्धी तु
 पूर्ववत् साध्ये । त्रेप तन्नग लाभाद्या लब्धिः वास्तवा लब्धिः भवति । शुद्धौ तु
 त्रेपतन्नगलानेन वर्जिता लब्धिः वास्तवा स्यात् ।

हृद् भाज्य और हर से ऊर्ध्वाङ्क तथा अधराङ्क को क्रम से भाग देने में
 भागफल समान ही होना चाहिए । जहाँ हर से अधिक त्रेप हो, वहाँ हर से
 त्रेप को भाग देकर शेष को त्रेप नान कर उच्चरीति से गुणक और लब्धि लाने
 पर गुणक वास्तव होता है, लेकिन लब्धि में, हर से त्रेप को तष्टित करने पर
 जो भाग फल हो, उसे जोड़ने से धन त्रेप में और घटाने से ऋण त्रेप में
 वास्तव लब्धि होती है ।

उपपत्तिः—कुट्टकप्रश्नानुसारेण - हा × ल = ना·गु + त्रे, पत्रौ इ· हा·

एषा लब्धिः १ । ज्ञेयतक्षणलाभेन ७ हीना जाता वियोगजा लब्धिः ६ ।
ज्ञेयतक्षणलाभाद्या लब्धिरिति ज्ञेयतक्षणलाभेन ७ युक्ता लब्धिः कार्यो
जातो ज्ञेयज्ञौ, लब्धिगुणौ ११।२ । शुद्धौ तु वर्जितेति जाते शुद्धिजे १।६ ।
अत्र शुद्धो न भवति तस्माद्विपरीतशोधनेन ऋणलब्धिः ६ । गुणः १ ।
धनलब्ध्यर्थं द्विगुणस्वहारज्ञेयः क्षिप्ते सति जाते ७।३ ।

उदाहरण—भाज्य ५ हार ३ और ज्ञेय २३ हैं । यहाँ उक्त रीति से बही
बना कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वं हते' इत्यादि रीति से ऊर्ध्वाङ्क २६ और अधराङ्क
२३ हुए । यहाँ २३ में उसके तन्त्रग ३ से भाग देने पर भागफल ७ आता है,
अतः २६ में भी उसके तन्त्रग ५ से भाग देने पर भागफल ९ नहीं ग्रहण कर
सूत्र के अनुसार ७ ही ग्रहण किया, तो लब्धि ११ और गुणक २ हुए । इनको
अपने २ तन्त्रग ५ और ३ में घटाने से ऋण ज्ञेय लब्धि ६ और गुणक
१ हुए । अब इष्ट २ मान कर भाज्य ५ को २ से गुणा कर उसमें आई हुई
लब्धि ६ को जोड़ने से ४ लब्धि हुई, और हर ३ को २ से गुणा कर गुणक
१ जोड़ने पर ७ गुणक हुए ।

अथवा—ज्ञेय २३ को हर ३ से भाग देने पर शेष २ ज्ञेय, भाज्य ५ और
हर ३ हुए । यहाँ भी पहले की तरह लब्धि और गुणक लाने पर क्रम से
४ और २ हुए । इनको अपने २ हर्षों में घटाने से ऋण ज्ञेय में लब्धि १ और
गुणक १ हुए । अब सूत्र के अनुसार धनज्ञेयीय लब्धि ४ में ज्ञेयतन्त्रग फल
७ को जोड़ने पर ११ वास्तव लब्धि हुई । ऋणज्ञेयीय लब्धि १ में ज्ञेयतन्त्रग
फल ७ को घटाने से ऋणात्मक ६ वास्तव लब्धि हुई । धनात्मक लब्धि लाने
के लिये इष्ट २ से भाज्य ५ और हार ३ को गुणा कर उनमें क्रम से ऋणात्मक
६ और १ को जोड़ने से लब्धि ४ और गुणक ७ हुए ।

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं वृत्तम् ।

क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुद्धेद्वरोद्घृतः ।

ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र क्षेपो हारहतः फलम् ॥ ९ ॥

यत्र ज्ञेयाभावः अथवा हरोद्घृतः क्षेपः शुद्धेत् तत्र शून्यं गुणः ज्ञेयः । पृ.
हारहतः क्षेपः फलं भवति ।

अथ सर्वत्र कुट्टके गुणलब्धोरनेकधादर्शनार्थं करणसूत्रं
वृत्तार्थम् ।

इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाक्षी ॥

वा ते गुणलब्धी इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते तदा बहुधा गुणाक्षी भवेताम् ।

उक्त रीति से जो गुणक और लब्धि हों, उसको कल्पित इष्ट से गुणे हुए अपने २ तन्त्रग में जोड़ने से अनेक प्रकार के गुणक और लब्धि होती हैं ।

अस्योदाहरणानि दर्शितानि पूर्वमिति ।

उदाहरण—इसका गणित पूर्व उदाहरण में स्पष्ट है ।

उपपत्तिः—कुट्टकप्रश्नानुसारेण भा० गु० = चै = हा० ल, पञ्चौ 'इ० भा० हा०' अनेन युक्तौ तदा, भा० गु० = चै + इ० भा० हा = हा० ल + इ० भा० हा

∴ भा (गु + इ० हा) = चै = हा (ल + इ० भा)

∴ ल + इ० भा = $\frac{\text{भा (गु + इ० हा)}}{\text{हा}}$ अत्र यदि गुणकः = गु + इ० हा,

तदा लब्धिः = ल + इ० भा, अत उपपन्नं सर्वम् ।

अथ स्थिरकुट्टके करणसूत्रं वृत्तम् ।

क्षेपे तु रूपे यदि वा विशुद्धे स्यातां क्रमाद्ये गुणकारलब्धी ।

अभीप्सितक्षेपविशुद्धिनिष्क्यां स्वहारतष्टे भवतस्तयोस्ते ॥ १० ॥

रूपनितघनक्षेपे वा विशुद्धे ऋणक्षेपे क्रमात् ये गुणकारलब्धी स्यातां ते अभीप्सितक्षेपविशुद्धिनिष्क्यां स्वहारतष्टे तयोः घनगणक्षेपयोः ते गुणकारलब्धी भवतः ।

क्षेप में यदि बड़ी संख्या हो, तो वहाँ घन या ऋण क्षेप के अनुसार १ क्षेप करपना कर उक्त रीति से गुणक और लब्धि को साधन कर उनको अपने अभीष्ट क्षेप से गुणा कर अपने २ हार से भाग देने पर क्षेप गुणक और लब्धि होते हैं ।

उपपत्तिः—कुट्टकोक्त्या हा० ल = भा० गु० = चै,

∴ हा० ल = $\frac{\text{भा० गु०}}{\text{चै}} = \frac{\text{भा० गु०}}{\text{चै}} = १$ अत्र हारभाज्यक्षेपाः परस्परं

और भाग-शेष को ऋणत्रेप मानकर कुट्टक रीति से लब्धि अंश और गुणक राशि-शेष होगा। बाद में भाज्य १२, हार कुट्टिन और ऋणात्मक राशि-शेष को त्रेप मान कर उक्त रीति से लब्धि राशि और गुणक भगन शेष होगा। इसके बाद कल्प ग्रह-भगन भाज्य, कुट्टिन हार और ऋणात्मक भगन-शेष को त्रेप कश्यता कर कुट्टक-रीति से लब्धि गन भगन और गुणक अहर्गण होगा। इसी तरह कश्माधिनास भाज्य, सौर दिन हार और ऋणात्मक अधिनास-शेष को त्रेप मानकर कुट्टक की रीति से लब्धि गत अधिनास और गुणक गत सौर दिन होगा। गत चान्द्र-दिन जानने के लिए कश्मावनादिन भाज्य, चान्द्रदिन हार और ऋणात्मक अवन शेष को त्रेप मान कर कुट्टक से लब्धि गत अवन और गुणक गत चान्द्र-दिन होगा। गत रवि-दिन और गत चान्द्र-दिन जानने के लिए अधिनास-शेष और अवन-शेष का ज्ञान अपेक्षित है।

$$\text{उपपत्ति:—भगगादिको ग्रहः} = \frac{\text{क प्र न} \times \text{अ}}{\text{क कु}} = \text{गन} + \frac{\text{न-शे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \text{ग. न} = \frac{\text{क प्र न} \times \text{अ} - \text{नशे}}{\text{क कु}}, \text{ ततः } \frac{१२ \times \text{नशे}}{\text{क कु}} = \text{गरा} + \frac{\text{राशे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \text{गरा} = \frac{१२ \times \text{नशे} - \text{राशे}}{\text{क कु}}, \therefore \frac{\text{राशे} \times ३०}{\text{क कु}} = \text{ग. अं} + \frac{\text{अंशे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \text{ग. अं} = \frac{\text{राशे} \times ३० - \text{अंशे}}{\text{क कु}}, \text{ एवं } \frac{\text{अंशे} \times ६०}{\text{क कु}} = \text{कला} + \frac{\text{कलाशे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \text{कला} = \frac{\text{अंशे} \times ६० - \text{कलाशे}}{\text{क कु}}, \text{ तथा } \frac{६० \times \text{कशे}}{\text{क कु}} = \text{विकला} + \frac{\text{विशे}}{\text{क कु}}$$

$$\therefore \text{विकला} = \frac{६० \text{ कशे} - \text{विशे}}{\text{क कु}} \text{ अत उपपन्नं सर्वम् ।}$$

ग्रहस्य विकलावशेषेण ग्रहाहर्गणयोरानयनम् । तद्यथा । तत्र पट्टि-
भाज्यः । कुट्टिनानि हारः । विकलावशेषं शुद्धिरिति प्रकल्प्य साध्ये गुणाप्री
तत्र लब्धिविकलाः स्युः । गुणस्तु कलावशेषम् ।

एवं कलावशेषं शुद्धिस्त्वत्र पट्टिभाज्यः । कुट्टिनानि हारः । लब्धिः
कला गुणो भागशेषम् ।

भागशेषं शुद्धिः । त्रिंशद्भाज्यः । कुट्टिनानि हारः । फलं भागा गुणो
राशिशेषम् ।

(शेषयोगं) अग्रं (ऋणत्रेपं) प्रकल्प्य उक्तवत् यः कुट्टकः कृतः असौ स्फुट-
कुट्टकः संलिष्टसंज्ञः स्यात् ।

जिस उदाहरण में एक ही राशि के गुणक अनेक हों और हर एक ही हो,
तो गुणकों के योग को भाज्य और शेषों के योग को ऋण-त्रेप मान कर उक्त
रिति से जो गुणक आवे वह वास्तव गुणक होगा। लब्धि वास्तव नहीं होती
अतः उसे छोड़ देना चाहिये।

उपपत्तिः—कल्प्यते भा० गु० = त्रे = हा० ल तथा भा० गु० = त्रे' = हा० ल

∴ भा० गु० = त्रे + भा० गु० = त्रे' = हा० ल + हा० ल

∴ भा (गु + गु) = त्रे + त्रे' = हा (ल + ल)

∴ ल + ल = $\frac{\text{भा (गु + गु) = (त्रे + त्रे')}{\text{हा}}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

कः पञ्चनिम्नो विहृतस्त्रियष्टया सप्तत्रयोऽथ स एव राशिः ।

दशाहतः स्याद्विहृतस्त्रियष्टया चतुर्दशाग्रो वद राशिनेनम् ॥ १ ॥

वह राशि वताओ जिसे पहली जगह ५ से और दूसरी जगह १० से
गुणा कर दोनों को ६३ से भाग देने पर क्रम से ७ और १४ शेष बँचते हैं।

अत्र गुणैक्यं भाज्यः । अग्रैक्यं शुद्धिः ।

न्यासः । भाज्यः १५ । हारः ६३ । त्रेपः २१ ।

पूर्ववज्जातो गुणः ७ । फलम् २ । एतौ स्वतस्त्रयाभ्यां शोषितौ जातौ
वियोगजौ लब्धिवर्णौ ३ । १४ ।

इति लीलावत्यां कुट्टकाध्यायः ।

उदाहरण—यहाँ सूत्र के अनुसार गुणक ५ और १० के योग १५ को
भाज्य और शेष ७ और १४ के योग २१ को ऋणात्मक त्रेप एवं ६३ हर को
हर मान कर तीनों को ३ से अपवर्तन देने पर दृढ़ भाज्य ५, हार २१ और
ऋणत्रेप ७ हुए। इन पर से कुट्टक-विधि से वही द्वारा उच्चाङ्क ७ और
अधराङ्क २८ हुए। इनको अपने २ तन्त्रण से भाग देने पर शेष २ लब्धि
और ७ गुणक हुए। इन्हें ऋणत्रेपीय बनाने के लिये अपने २ तन्त्रण में घटाने
से लब्धि ३ और गुणक १४ हुए।

इति लीलावत्यां तच्चक्राशिकोपेतः कुट्टकाध्यायः ।

अत्रोद्देशकः ।

द्विकाष्टकाभ्यां त्रिनवाष्टकैर्वा निरन्तरं द्रव्यादिनवावसानैः ।

संख्याविभेदाः कति सम्भवन्ति तत्संख्यैक्यानि पृथग्वदासु ॥ १ ॥

२, ८ और ३, ९, ८ तथा २ से लेकर ९ पर्यन्त अङ्कों के क्रम से दो, तीन और आठ अङ्कों से बनी संख्या के भेद बताओ । एवं उन भेदों के अलग २ योग बताओ ।

न्यासः । २ । ८ । अत्र स्थाने २ । स्थानान्तनेकादिचयाङ्कौ १ । २ ।

घातः २ । एवं जातौ संख्याभेदौ २ । अयं स एव घातोऽङ्कसमाप्त १०
निम्नः २० । अङ्कमित्यानया २ भक्तः १० । स्थानद्वये युक्तो जातं
संख्यैक्यम् । ११० ।

द्वितीयोदाहरणे ।

न्यासः । ३ । ६ । ८ । अत्रैकादिचयाङ्काः १ । २ । ३ । घातः ६

एवावन्तः संख्याभेदाः । घातः ६ अङ्कसमाप्ता २० हतः १२० । अङ्कमित्या
भक्तः ४० । स्थानत्रये युक्तो जातं संख्यैक्यम् ४४४० ।

तृतीयोदाहरणे ।

न्यासः । २ । ३ । ४ । ५ । ६ । ७ । ८ । ९ । एवमत्र संख्याभेदाश्च-

त्वारिंशत्सहस्राणि शतत्रयं विंशतिश्च ४०३०० । संख्यैक्यश्च चतुर्विंश-
तिनिखर्वाणि त्रिषष्टिपद्मानि नवनवतिकोटयः नवनवतिलक्षाः पञ्चसप्त-
तिनहस्राणि शतत्रयं पष्टिश्च २४६३६६६६७४३६० ।

उदाहरण—पहले प्रश्न में २ और ८ से दो स्थान वाली संख्या का भेद निकालना है, अतः दो स्थान तक पूंजादि अङ्कों का गुणनफल = $1 \times 2 = 2$ यह संख्या का भेद हुआ अर्थात् इन अङ्कों में दो ही संख्या बन सकती हैं, जैसे २८ और ८२ । अब भेद-संख्या २ को अङ्कों के योग ($2 + 8 =$) १० में गुणा करने पर २० हुआ । इसे स्थान संख्या २ से भाग देने पर १० हुआ । इसे दो जगह में क्रम से एक स्थान बढ़ा कर रख कर के योग करने से ($10 = 110$) संख्याओं का योग हुआ । दूसरे उदाहरण में ३, ९ और ८ हैं । मूल के अनुसार तीन स्थान तक पूंजादि अङ्कों का घात $1 \times 2 \times 3 = 6$ संख्या-भेद हुआ । अब भेद संख्या ६ को अङ्कों के योग ($3 + 9 + 8 =$) २०

उपपत्तिः—अथ यदि कस्याञ्चित् संख्यायां समाना पञ्चाङ्काः स्युस्तदा तद्भेदस्त्वेक एव । यदि च तस्यां तुल्या अतुल्याश्चाङ्कास्तदा तद्भेदार्थं कल्पन्ते संख्यायां सप्ताङ्का, यत्र चत्वारस्तुल्यास्तेन संख्यास्थानानि सप्त । अत्र पूर्वरीत्या भेदाः = १ × २ × ३ × ४ × ५ × ६ × ७ = पूर्वोक्त स्थान चतुष्टय भेद × ५ × ६ × ७, अत्र चत्वारस्तुल्याङ्काः सन्ति तेन पूर्वयुक्त्या स्थान चतुष्टयभेदो रूप तुल्यः स्यादतः पूर्वोक्तभेदाः = १ × ५ × ६ × ७

$$= \frac{\text{पूर्वोक्त स्थानचतुष्टय भेद} \times ५ \times ६ \times ७}{\text{पूर्वोक्त स्थानचतुष्टय भेद}} = \frac{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७}{\text{पूर्वोक्त स्थानचतुष्टय भेद}}$$

अत्र उपपन्नम् । संख्यैक्यस्य वासना पूर्ववज्ज्ञेया ।

अत्रोद्देशकः ।

द्विद्वयेऋभूपरिमितैः कति संख्यकाः स्युस्तासां युतिश्च गणकाशु मम प्रचक्ष्व । अन्भोधिक्नुम्भिसरभूतशरैस्तथाङ्कैश्चेदङ्कपाशविधियुक्तिविशारदोऽसि ॥ १ ॥

हे गणक, २, २, १ और १ अङ्कों की संख्या और उनका योग एवं ४, ८, ५, ५ और ५ संख्या के भेद तथा उनका योग बताओ ।

न्यासः २ । २ । १ । १ । अत्र प्राग्वद्भेदाः २४ । यावत्स्थानेषु तुल्याङ्का इति । अथैवं प्रथमं तावत्स्थानद्वये तुल्यौ । प्राग्वन् स्थानद्वयात्त्राणौ भेदौ २ । पुनरन्यत्रापि स्थानद्वये तुल्यौ । तत्राप्येवं भेदौ २ । भेदाभ्यां प्राग्भेदाः २४ भक्ता जाता भेदाः ६ । तद्यथा २२११ । २१२१ । २११२ । १२१२ । १२२१ । ११२२ । पूर्ववत्संख्यैक्यश्च ६६६६ ।

न्यासः । ४ । = । ५ । ५ । ५ । अत्रापि पूर्ववद्भेदाः १२० । स्थानत्रयोत्यभेदै ६ भक्ता जाताः २० । तद्यथा—

४ = ५ ५ ५ । = ४ ५ ५ ५ । ५ ४ = ५ ५ ।
 ५ = ४ ५ ५ । ५ ५ ४ = ५ । ५ ५ = ४ ५ ।
 ५ ५ ५ ४ = । ५ ५ ५ = ४ । ४ ५ = ५ ५ ।
 ४ ५ ५ = ५ । ४ ५ ५ ५ = । = ५ ४ ५ ५ ।
 = ५ ५ ४ ५ । = ५ ५ ५ ४ । ५ ४ ५ = ५ ।
 ५ = ५ ४ ५ । ५ ५ ४ ५ = । ५ ५ = ५ ४ ।

$$= \frac{\text{स्थानद्वयभेद} \times (\text{अन्तिमाङ्क} - २)}{१}$$

$$= \frac{(\text{अन्तिम अङ्क} - १) \text{ सर्व भेद} \times (\text{अन्तिमाङ्क} - २)}{१}, \text{ अत्र सर्वभेद} =$$

अन्तिमाङ्क, अतः (अ. अं - १) अ. अं (अ. अं - २), एवमत्रेऽपि ज्ञेयमत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

स्थानषट्कस्थितैरङ्कैरन्योन्यं खेन वज्रितैः ।

कति संख्याविभेदाः स्युर्यदि वेत्सि निगद्यताम् ॥ १ ॥

शून्य को छोड़ कर, ६ स्थान में स्थित अङ्कों से संख्या के कितने भेद होंगे, यह बताओ ।

अत्रान्तिमाङ्को नव ६ । अत्रान्त्याङ्को यावत्स्थानमेकापचितेन न्यासः ।
६ । ५ । ७ । ६ । ५ । ४ । एषां घाते जाताः संख्याभेदाः ६०४८० ।

उदाहरण—यहाँ अन्तिम अङ्क ९ और संख्या में स्थान ६ हैं, अतः अन्तिम अङ्क ९ से आरम्भ कर एक अपचित (न्यून) क्रम से ६ स्थान पर्यन्त अङ्कों के घात $९ \times ८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४ = ६०४८०$ संख्या का भेद हुआ ।

अन्यत्करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

निरेकमङ्कैक्यमिदं निरेकस्थानान्तमेकापचितं विभक्तम् ॥ ३ ॥

रूपादिभिस्तन्निहतैः समाः स्युः संख्याविभेदा नियतेऽङ्कयोगे ।

नवान्वितस्थानकसंख्यकाया ऊनेऽङ्कयोगे कथितं तु वेद्यम् ॥ ४ ॥

संक्षिप्तमुक्तं पृथुताभयेन नान्तोऽस्ति यस्माद्गणितार्णवस्य ।

अङ्कयोगे नियते (सति) अङ्कैक्यं निरेकं (कृत्वा) निरेकस्थानान्तं एकापचितं (स्थाप्यम्) । इदं रूपादिभिः विभक्तं तन्निहतैः समाः संख्याविभेदाः स्युः । कथितं तु अङ्कयोगे नवान्वितस्थानकसंख्यकायाः ऊने (सति) वेद्यम् । पृथुताभयेन संक्षिप्तं उक्तम्, यस्माद् गणितार्णवस्य अन्तः न अस्ति ।

यदि संख्या में अङ्कों का योग नियत हो, तो अङ्कों के योग में १ वटा कर उसे निरेक स्थान तक एक-एक अपचित (वटा) कर क्रम से रक्त के उनमें १ आदि से भाग देकर भाग फलों का गुणन फल संख्या का भेद होता है । ऐसी स्थिति में अङ्कों का योग ९ से युत स्थान-संख्या से कम ही होना चाहिए ।

उपपन्नं 'निरैकनङ्कैक्यमिदमित्यादि नियतेऽङ्कयोगे' इत्यन्तम् । अत्रैवान्तभेदेषु नवाधिका कापि संख्या नानुदित्यंतदर्थं 'नवान्वितस्थानकसंख्यकाया ऊनेऽङ्कयोगे क्रियतमिति भास्करोक्तं युक्तियुक्तम् ।

उदाहरणम् ।

पञ्चस्थानस्थितैरङ्कैर्यद्योगोत्त्रयोदश ।

कृति भेदा भवेत्संख्या यदि वेत्ति निगद्यताम् ॥ १ ॥

५ स्थान वाली संख्या के अङ्कों का योग १३ है तो उनके भेद बताओ ।

अत्राङ्कैक्यम् १३ निरैकम् १२ । एतन्निरैकस्थानान्तमेकापचित्तने-
द्यादिभिश्च भक्तं जातम् $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{13}{4}$ और $\frac{13}{5}$ । एषां घातसमा जाताः संख्या-
भेदाः ॥ ४६५ ॥

इति श्रीलीलावत्यामङ्कपाशः ।

उदाहरण—यहाँ अङ्कों का योग १३, तथा स्थान संख्या ५ है । अब सूत्र के अनुसार अङ्कयोग १३ में १ घटाने से १२ हुआ । इसको निरैक स्थान संख्या अर्थात् ४ जगहों में एकापचित क्रम में रख कर उनको एक आदि संख्या से क्रम से भाग देने पर $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{13}{4}$ और $\frac{13}{5}$ हुए । इनका घात = $\frac{13}{2} \times \frac{13}{3} \times \frac{13}{4} \times \frac{13}{5} = 33 \times 4 \times 5 = 265$ संख्या का भेद हुआ ।

न गुणो न हरो न कृतिर्न धनः पृष्टस्तथापि दुष्टानाम् ।

गणितगणकग्रहणां स्यात्पातोऽवश्यमङ्कपाशेऽस्मिन् ॥ १ ॥

येषां सुजातिगुणवर्गविभूषिताङ्गी

शुद्धाऽखिलव्यवहृतिः खलु कण्ठसक्ता ।

लीलावतीह सरसोक्तिमुदाहरन्ती

तेषां सदैव मुखसम्पदुपैति वृद्धिम् ॥ २ ॥

इति श्रीभास्कराचार्यविरचिते सिद्धान्तशिरोमणी

लीलावतीसंज्ञः पाठ्यध्यायः सन्पूर्णः ॥

लीलावत्यां वृत्तसंख्या २६६ ।



परिशिष्ट

दिनांक १-१०-१९५८ ई० से प्रचलित मैट्रिक प्रणाली

१००० ग्राम = १ किलोग्राम ।

१०० किलो ग्राम = १ क्विण्टल ।

१०० ग्राम = ८ $\frac{1}{2}$ तोला

२०० " = १७ तोला

४०० " = ३४ तोला

५०० " = ४३ तोला

प्रति छटाक पर ग्राम जानने की सारिणी:—

छटाक	१	२	३	४	५	६	७	८
ग्राम	५८	११७	१७५	२३३	२९२	३५०	४०८	४६७
छटाक	१	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६
ग्राम	५२५	५८३	६४२	७००	७५८	८१६	८७५	९३३

एक सेर से दो सेर तक का ग्राम:—

१ सेर = ९३३ ग्राम । १ सेर ४ छटाक = १ किलो ग्राम १६६ ग्राम । १ सेर
८ छटाक = १ किलोग्राम ४०० ग्राम । १ सेर १२ छटाक = १ किलो ६३३ ग्राम ।
२ सेर = १ किलो ८६६ ग्राम ।

कमल काकल्ले अदिअन नका पैसा के दिअर के प्रति

दिअर का नका पैसा बनने के सूत्रियाँ—

प्रति एक : नका पैसा = प्रति दिअर ३ नका पैसा :

इस तरह प्रति के एक के सख्तें .

१	२	३	४	५
१ = १	२ = २	३ = ३	४ = ४	५ = ५
६ = ६	७ = ७	८ = ८	९ = ९	१० = १०
११ = ११	१२ = १२	१३ = १३	१४ = १४	१५ = १५
१६ = १६	१७ = १७	१८ = १८	१९ = १९	२० = २०
२१ = २१	२२ = २२	२३ = २३	२४ = २४	२५ = २५
२६ = २६	२७ = २७	२८ = २८	२९ = २९	३० = ३०
३१ = ३१	३२ = ३२	३३ = ३३	३४ = ३४	३५ = ३५
३६ = ३६	३७ = ३७	३८ = ३८	३९ = ३९	४० = ४०
४१ = ४१	४२ = ४२	४३ = ४३	४४ = ४४	४५ = ४५
४६ = ४६	४७ = ४७	४८ = ४८	४९ = ४९	५० = ५०

इसके सिद्ध होता है कि १०० न. पै. = ११२ न. पै. : अर्थात् १ न. = १.१२ न. पै. : अर्थात् प्रतिअर १ नका पैसा के लिये प्रति दिअर ३ न. ३६ न. पै. होते हैं। इसको सिद्ध करने के प्रति नक के नका बनकर होते प्रति दिअर ३ न. ३६ न. पै. के होते हैं : अर्थात् प्रति इकाई तरह बनकर जाते हैं . इति ।



अन्तधन = Last term of series (लास्ट टर्म आफ्-सोरीज)

चित्र = Figure (फीगर)

वृत्त = Circle (सर्किल)

परिधि = Circumference (सरकमफ्रैन्स)

ध्यान = Diameter (डाइमीटर)

त्रिज्या = Radius (रेडियस)

वनफल = Volume (मौलुम)

त्रिभुज = Triangle (ट्रैन्गल)

चतुर्भुज = Quadrilateral (क्व. ड्रिलेटरल)

वर्गचित्र = Square (रक्कायर)

आयन = Rectangle (रेक्टैन्गल)

द्वर्ग = Diagonal (डाइगनल)

लम्ब = Perpendicular (परपेन्डीकुलर)

भुजा = Side (साइड)

अवध = Segment (सिगमेन्ट)

चाप = Arc (आर्क)

वेध = Deapth (डेप्थ)

असन्नमान = Approximate Value (एप्रोक्सिमेट वैल्यू)

अक्ष = Angle (एन्गल)

समानान्तर चतुर्भुज = Parallelogram (पैरलैलोग्राम)

समद्विबाहुत्रिभुज = Issosceless triangle (आइसोसलेस ट्रैन्गल)

वृद्धक = Indeterminate Multiple (इन्डीटरमीनेट मल्टिपुल)



रक्षाशिक=चार राशि के ज्ञान से
पञ्चम राशि ज्ञानने का नियम ।

भाण्ड प्रति भाण्ड=विनिमय ।

निग्रह व्यवहार=मिश्रित (अनेक गणित)
गणित की पद्धति ।

नक्षत्रक=साक्षे में किसी साक्षा का
लगाया धन ।

ह्यन्तर=सूद ।

श्रुकुन्तल=सूद पर दिये हुये धन के
दुकड़े ।

सुवर्ग वर्ण=सुवर्ग का भाव ।

श्रेणी व्यवहार=श्रेणी गणना का एक
उपाय ।

श्रेणी=निम्न जातीय द्रव्यों को मिलाने
के लिये गणनामेद ।

श्रेणी फल=श्रेणी का योग ।

संकलित=क्रमगुणित या एकादि अंकों
का योग ।

संकलितैक्य=एकादि अंकों के संकलित
का योग ।

आदि=श्रेणी का प्रथम पद ।

चय=वृद्धि ।

गच्छ=पद ।

अन्तधन=श्रेणी का अन्तिम पद ।

नम्यधन=श्रे० नम्य पद ।

सर्वधन=श्रेणी के पदों का योग ।

त्रैत्र व्यवहार=त्रैत्र सम्बन्धी गणित की
पद्धति ।

भुज=समकोण त्रिभुज का आधार ।
कोटि=समकोण त्रिभुज की ऊँचाई ।

अवधा=अवाधा=लण्ड ।

सम्पात=कटान ।

धनुष=चाप ।

वेध=गहराई ।

परधि=वेरा ।

व्यास=वृत्त की बीच की दूरी ।

त्रात व्यवहार=त्रात सम्बन्धी त्रैत्रफल-
आदि गणित की पद्धति ।

चित्ति व्यवहार=वह गणित जिस से
किसी शीवार में लगने वाली ईंटों,
ढोंकों की गिनती नालूम की जाय ।

क्रकत्र व्यवहार=चिराने वाली लकड़ी
की गणित रीति ।

राशि व्यवहार=धान्य आदि राशि
(ढेर) की मापन विधि ।

झाया व्यवहार=झाया, शंकु आदि
ज्ञानने का गणित ।

कुट्टक=जो गणित ऐसा गुणक लाके
जिसने निर्दिष्ट संख्या को गुना कर
उस में कुछ जोड़ या बटाकर फिर
किसी निर्दिष्ट संख्या से भाग देने
पर लब्धि शून्य हो ।

अंकपात=गणित की एक क्रिया (इसमें
स्थान संख्या और अंक योग वर-
मेद निकाला गया है) ।

॥ इति परिनिष्टे समाप्तम् ॥

अस्याधिकाराः किल पुस्तकस्य सुहृसुहृदुदयकादयश्च ।

प्रकाशकायोनकृता हि सर्वे नान्यस्य कस्यापि जनस्य सन्ति ॥

प्रश्नपत्राणि

१. यदि समभुवि वेगद्वित्रिगुणप्रमाण इत्यादिपद्यं व्याख्याय गणितं लेख्यम् ।
२. यत्र ज्ञात्ये भुजकोटियोगः = २३ कर्गः = १७ तत्र भुजकोटिमाने के ?
३. उच्छ्रयेण गुणितं त्रितेः क्विल क्षेत्रसम्भवफलं वनमित्यादिभूयं व्याख्याय अत्रैकमुदाहरणमङ्गीकृत्य सूत्रस्यास्य चरितार्थता प्रदर्शनीया ।
४. नन्दचन्द्रैर्मितं द्वायचोरन्तरं विश्वतुल्यं ययोरित्याद्युदाहरणगणितं प्रदर्शयत ।
५. चतुर्भुजक्षेत्रे भुजाः ५१, ६८, ७५, ४० एकः कर्गः ७७ अत्र क्षेत्रफलं किम् ?
६. निश्चिबहिष्कोणलक्षणान्यराशेः परिविमानमद्बुलात्मकं ५७६ तदा सूत्रान्-
दिधान्यत्तारीप्रमाणानि कियन्ति ?
७. ऋद्धुदापान्तरं ३, शङ्कुः ३, द्वाया ३, तत्र द्वापौच्यं कियत् ?
८. कर्गः १७ भुजकोटियोगः २३ अत्र भुजकोटी के ?
९. व्यासः ७ अत्र गोलवृष्टफलं किम् ?
१०. द्वायान्तरं १९ कर्गान्तरं १३ । अत्र प्रमे के ?
११. (अ) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ एषु कः महत्तमः ?
(ब) $\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ । सरलीक्रियतान् ।
१२. केनापि पुरुषेण स्वधनस्य तृतीयांशः ($\frac{2}{3}$) ज्येष्ठपुत्राय, चतुर्थांशः ($\frac{1}{4}$)
कनिष्ठपुत्राय, अवशिष्टोऽन्तः कन्यायै वितीर्णः । यदि कन्यया लब्धं धनं
पुत्रद्वयलब्धधनान्, रूप्यकाणां सहस्रचतुष्टयं (४०००) न्यूनमस्ति, तर्हि
विनागात्पूर्वं पितुर्धनपरिमाणं ब्रूहि ।

२२. वायानेकस्यां तिस्रो जलनलिकाः प्रतिबद्धाः सन्ति । तानु पञ्च ५, द्वितीया ६, तृतीया च ७ इ पलनितेषु कालेषु वापीं पूरयति । ताः सर्वा वापीपूरणार्थं सदैव विमुक्ताः । पञ्जरलानन्तरं प्रथमाञ्जवद्धा । तदा शेषान्यां जलनलिकान्यां वापीपूरणकालः कः ?

२३. नागिक्याष्टकनिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं,
नद्वरागि च पञ्चरत्नवगिजां येषां चतुर्णां धनम् ।
सहस्रेणहवशोन ते निजधनाद्दत्तैकमेकं नियो,
त्रात्रास्तुख्यधनाः पृथग् वद् सन्ते तद्वत्तमौल्यानि मे ॥

२४. वार्गाकारस्यैकस्य चैत्रस्यैका भुजा पट्टशत(६००)हस्तपरिमिताऽस्ति ।
चैत्रञ्च समन्तात् दश(१०)हस्तवित्स्तेन मार्गंग परिवेष्टितं विद्यते । अस्य
मार्गस्य शिलावृत्तकरणे क्रियान् व्ययो भविष्यति, यदि शत(१००)वर्ग-
हस्तस्य परिमितस्य मार्गस्य शिलावृत्तकरणव्ययः सार्द्धल्पकद्वयं (२३)
भवेत् ।

२५. शङ्कोर्भाङ्कनिताङ्गुलस्य मुनते दृष्टा किलाष्टाङ्गुला
छायाप्रानिमित्ते करद्वयनिते न्यस्तस्य देशे पुनः ।
नस्यैवाङ्कनिताङ्गुला यदि तदा छायाप्रदीपान्तरं
दीर्घाच्च्यं च क्रियद्वद् व्यवहृतिं छायानिधां वेत्ति चेत् ॥

२६. (अ) ८५ इत्यस्य निघाङ्गुलस्य वर्गं वद ।

(ब) ११११ अस्याः संहयायाः आद्याङ्करीत्या घनः कः ?

२७. ज्ञायैः कर्गवधाय मार्गंगगगं क्रुद्धो रगे संदधे,
नस्यार्थेन निवार्यं तच्छ्ररगगं नूलैश्चतुर्निर्हयान् ।
कस्य पद्मनिरयेपुनिच्छिनिरिपि च्छत्रं ध्वजं कारुं कम्,
विच्छेदास्य सिरः शरेण कति ते यानजुनः संदधे ॥
पयोच्छं गनितं व्याख्यासहितं प्रदर्शय ।

उपपत्तिः—अत्रालापानुसारेण सर्वत्र फलसमत्वादादाविष्टसमं फलं
प्रकल्प्यानुपातेन प्रमाणधन सम्बन्धीयफलम् = $\frac{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}}{\text{प्र. का.}}$, पुनरनु-

पातेन प्रथमखण्डम् = $\frac{\text{प्र. घ.} \times \text{इ.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}} = \frac{\text{प्र. घ.} \times \text{इ.} \times \text{प्र. का.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}}$
प्र. का.

एवमेव द्वितीयखण्डम् = $\frac{\text{प्र. घ' } \times \text{इ.} \times \text{प्र. का' }}{\text{प्र. फ' } \times \text{व्य. का' }} ।$

∴ प्र. ल. + द्वि. ल. = इ. $\left\{ \frac{\text{प्र. घ.} \times \text{प्र. का.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}} + \frac{\text{प्र. घ' } \times \text{प्र. का' }}{\text{प्र. फ' } \times \text{व्य. का' }} \right\} = \text{इ.} \times \text{यो.}$

∴ इ. × यो. = इष्टसम्बन्धीयमिश्रधनम् ।

ततोऽनुपातः—यद्यनेन पृथक् खण्डानुरूपं मूलधनं तदोद्दिष्टमिश्रधनेन
क्रिमिति ज्ञातं क्रमेण मूलधनमानम्—

∴ वास्तव प्र. ल. = $\frac{\text{मि. घ.} (\text{प्र. का.} \times \text{प्र. घ.}) \times \text{इ.}}{\text{इ. यो.} \times \text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}}$
= $\frac{\text{मि. घ.} (\text{प्र. का.} \times \text{प्र. घ.})}{\text{यो.} \times \text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}}$ । एवं द्वि. लं. = $\frac{\text{मि. घ.} (\text{प्र. का' } \times \text{प्र. घ'})}{\text{व्य. का' } \times \text{प्र. फ' } \times \text{यो.}}$

अत उपपद्यन् ।

उद्देशकः ।

यत् पञ्चकत्रिकचतुष्कशतेन दत्तं
खण्डैस्त्रिभिर्गणक ! निष्कशतं पट्टनम् ।

मासेषु सप्तदशपञ्चसु तुल्यमात्रं

खण्डत्रयेऽपि हि फलं वद खण्डसंख्याम् ॥ १ ॥

हे गणक ! १४ निष्क को ३ टुकड़े करके ५, ३ और ४ सैकड़े सूद को
दर से दिया गया, तो तीनों टुकड़ों में क्रम से ३, १० और ५ महीने में
समान ही सूद निडे, तो टुकड़ों की संख्या बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । १ । ७ । १ । १० । १ । ५ ।
१०० । १०० । १००

मिश्रधनम् ६४ । लब्धानि यथाक्रमेण खण्डानि २४ । २५ । ४२ ।
पञ्चराशिकवत्करणेन समकलान्तरम् २३ ।

उपपत्तिः—अत्रालापानुसारेण सर्वत्र फलसमत्वादादाविष्टसं फलं
प्रकल्प्यानुपातेन प्रमागधन सम्बन्धीयफलम् = $\frac{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}}{\text{प्र. का.}}$, पुनरनु-
पातेन प्रथमखण्डम् = $\frac{\text{प्र. घ.} \times \text{इ}}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}} = \frac{\text{प्र. घ.} \times \text{इ} \times \text{प्र. का.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}}$
प्र. का.

$$\text{एवमेव द्वितीयखण्डम्} = \frac{\text{प्र. घ' } \times \text{इ} \times \text{प्र. का' }}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का' }} ।$$

$$\therefore \text{प्र. ख.} + \text{द्वि. ख.} = \text{इ} \left\{ \frac{\text{प्र. घ.} \times \text{प्र. का.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}} + \frac{\text{प्र. घ' } \times \text{प्र. का' }}{\text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का' }} \right\} = \text{इ} \times \text{यो.}$$

$$\therefore \text{इ} \times \text{यो.} = \text{इष्टसम्बन्धीयमिध्रघनम्} ।$$

ततोऽनुपातः—यद्यनेन पृथक् खण्डदुस्यं मूलवनं तदोद्दिष्टमिध्रघनेन
किमिति ज्ञातं क्रमेण मूलघनमानम्—

$$\therefore \text{वास्तव प्र. ख.} = \frac{\text{मि. घ.} (\text{प्र. का.} \times \text{प्र. घ.}) \times \text{इ}}{\text{इ. यो.} \times \text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}}$$

$$= \frac{\text{मि. घ.} (\text{प्र. का.} \times \text{प्र. घ.})}{\text{यो.} \times \text{प्र. फ.} \times \text{व्य. का.}} । \text{ एवं द्वि. ख.} = \frac{\text{मि. घ.} (\text{प्र. का' } \times \text{प्र. घ' })}{\text{व्य. का' } \times \text{प्र. फ.} \times \text{यो.}}$$

अत उपपन्नम् ।

उद्देशकः ।

यत् पञ्चकत्रिकचतुष्कशतेन दत्तं
खण्डैत्रिभिर्गणक ! निष्कशतं पट्टनम् ।

भासेषु सप्तदशपञ्चसु तुल्यमात्रं

खण्डत्रयेऽपि हि फलं वद खण्डसंख्याम् ॥ १ ॥

हे गणक ! १४ निष्क को ३ टुकड़े करके ५, ३ और ४ सैकड़े सूद की
दर से दिया गया, तो तानों टुकड़ों में क्रम से ७, १० और ५ महाने में
समान ही सूद मिले, तो टुकड़ों की संख्या बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । १ । ७ । १ । १० । १ । ५ ।
१०० । १०० । १००

मित्रघनम् ६४ । लघ्यानि यथाक्रमेण खण्डानि २४ । २५ । ४२ ।
पञ्चराशिकचत्वार्येण समकलान्तरम् २३ ।

(२) किसी संख्या के ऐसे गुणनीयक, जिनका फिर टुकड़ा, न हो सके, उस संख्या के वे उत्पादक कहलाते हैं और वे टुकड़े रुढ़ि कहलाते हैं।

$$\text{यथा } १८९० = ३ \times ३ \times ३ \times २ \times ५ \times ७$$

यहाँ इन टुकड़ों का फिर टुकड़े नहीं हो सकते हैं। अतः ये प्रत्येक १८९० के उत्पादक हैं।

उत्पादक के द्वारा—वर्गमूल लाने की विधि।

$$(३) ८८२०९ = ३ \times २९४०३ = ३ \times ३ \times ९८०१$$

$$= ३ \times ३ \times ३ \times ३२६७ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times १०८९$$

$$= ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३$$

$$= ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३$$

$$\therefore \sqrt{८८२०९} = ३ \times ३ \times ३ \times ३ = २९७$$

अभ्यासार्थ प्रश्नाः—

वर्गमूल बताओ।

- (१) १५००६२५ (२) ३९०६२५ (३) १०२४ (४) ३७२१
(५) १६०८०१ (६) ६२५०००० (७) ९९३५१०४ (८) ५०६२५।
इति।

अथ घनविधिः।

अथ घने करणसूत्रं वृत्तत्रयम्।

समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः।

आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्गस्थ्यन्त्याहतोऽध्यादिवनश्च सर्वे ॥११॥

स्थानान्तरत्वेन युता घनः स्यात् प्रकल्प्य तत्खण्डयुगं ततोऽन्त्यम्।

एवं मुहुर्बर्गघनप्रसिद्धानाद्याङ्कतो वा विधिरेव कार्यः ॥ १२ ॥

खण्डाभ्यां वा हतो राशित्त्रिघ्नः खण्डवनैक्ययुक्।

वर्गमूलघनः स्वधो वर्गराशेर्वनो भवेत् ॥ १३ ॥

बराबर तीन संख्याओं के गुणन फल को घन कहते हैं। जैसे ९ का घन =

= अ^३ + ३ अ क (अ + क) + क^३ = अ^३ + ३ अ क रा + क^३ ।

= ३ अ × क × रा + अ^३ + क^३ । एतेन 'खण्डान्यां वा हतो राशि' इति

पद्यनुपपन्नम् । यदि राशिः = अ^२ तदाऽस्य घनः—

रा^३ = (अ^२)^३ = अ^६ = अ^३ × अ^३ । अतएव 'वर्गमूलघनः स्वप्नः' इति

सूत्रमुपपन्नम् ॥ ११-१३ ॥

अत्रोद्देशकः ।

नवघनं त्रिघनस्य घनं तथा कथय पञ्च घनस्य घनं च ने ।

घनपदं च ततोऽपि घनात् सखे यदि घनेऽस्ति घना भवतो मतिः ॥१॥

हे मित्र ! यदि घन क्रिया में वेरी बुद्धि निपुण है, तो ९ का घन, ३ के घन २७ का घन और ५ के घन १२५ का घन बताओ और उन घनों के घनमूल भी कहो ॥ १ ॥

न्यासः ६ । २७ । १२५ ।

जाताः क्रमेण घनाः ७२६ । १६६८३ । १६५३१२५ ।

अथ वा राशिः । ६ । अस्य खण्डे ४ । ५ । आभ्यां राशिर्हतः १८० ।

त्रिनिम्नञ्च ५४० । खण्डघनैक्येन १८८ । युतो जातो घनः ७२६ ।

अथ वा राशिः २७ । अस्य खण्डे २० । ७ आभ्यां हतखिन्नञ्च

११३४० । खण्डघनैक्येन ८३४३ युतो जातो घनः १६६८३ ।

अथ वा राशिः ४ । अस्य मूलं २ । घनः ८ । अयं स्वप्नो जात-

श्चतुर्णां घनः ६४ ।

वा राशिः ६ अस्य मूलम् ३ । घनः २७ अस्य वर्गो नवानां घनः

७२६ । यो वर्गघनः स एव वर्गमूलघनवर्गः । बीजगणितेऽस्योपयोगः ।

इति घनः ।

उदाहरण—पहली रीति से ९^३ = ९ × ९ × ९ = ७२९ ।

२७^३ = २७ × २७ × २७ = १९६८३ । १२५^३ = १२५ × १२५ × १२५ =

१९५३१२५ ।

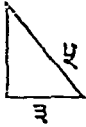
दूसरी रीति से २७ का घन करना है, तो यहाँ अन्त्य अङ्क २ का घन ८

को लिखकर अन्तिमाङ्क २ के वर्ग ४ को त्रिगुणित आदिम अङ्क (७ × ३) = २१

से गुणा करने पर (२१ × ४) = ८४ हुआ । इसको स्थानान्तर करके व्यर्थ

अथ कर्णभुजाभ्यां कोट्यानयनम् ।

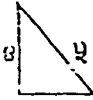
न्यासः ।



कर्णः ५ । भुजः ३ । अनयोर्वर्गयोरन्तरम्
१६ । एतन्मूलं कोटिः ४ ।

अथ कोटिकर्णाभ्यां भुजानयनम् ।

न्यासः ।



कोटिः ४ । कर्णः ५ । अनयोर्वर्गान्तरम्
६ । एतन्मूलं भुजः ३ ।

अत्रोपपत्तिः—अत्र 'अ क व' त्रिभुजे क व = कर्णः । अ व = भुजः ।

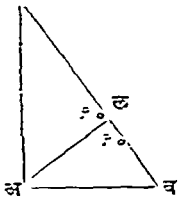
क

क अ = कोटिः । 'अ' बिन्दोः अ ल लम्बः = कोटिः ।

क अ = कर्णः । क ल = भुजः । अथ 'क अ व'

'क अ ल' त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन क ल =

$\frac{\text{क अ} \times \text{क अ}}{\text{क व}} = \frac{\text{कोटि}^2}{\text{कर्ण}}$ । पुनः 'अ क व' 'अ ल व'



त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन ल व = $\frac{\text{अ व} \times \text{अ व}}{\text{क व}} =$

$\frac{\text{भुज}^2}{\text{कर्ण}}$ । परञ्च क व = कर्ण = क ल + ल व = $\frac{\text{कोटि}^2}{\text{क}} + \frac{\text{भुज}^2}{\text{क}}$ ।

$\therefore \text{को}^2 + \text{भु}^2 = \text{कर्}^2, \therefore \sqrt{\text{को}^2 + \text{भु}^2} = \text{कर्ण}$ ।

वा $\text{कर्}^2 - \text{भु}^2 = \text{को}^2 \therefore \sqrt{\text{कर्}^2 - \text{भु}^2} = \text{को}$ । एवं $\text{कर्}^2 - \text{को}^2 = \text{भु}^2$

$\therefore \text{भु} = \sqrt{\text{कर्}^2 - \text{को}^2}$ । अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

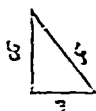
कोटिश्चतुष्टयं यत्र दोषयं तत्र का श्रुतिः ।

कोटिं दो. कर्णतः कोटिश्रुतिभ्यां च भुजं वद ॥ १ ॥

जहाँ कोटि ४ और भुज ३ है, वहाँ कर्ण का मान बताओ । भुज और कर्ण के ज्ञान से कोटि एवं कर्ण और कोटि जानकर भुज कहो ।

न्यासः ।

अथ भुजज्ञानम् ।



कोटिः ४ । कर्णः ५ । एवं जातो भुजः ३ ।

उदाहरण—कोटि ४ और भुज ३ है । इन दोनों के वर्गयोग जानने के लिये सूत्र के अनुसार ४, ३ का द्विगुणवात = $४ \times ३ \times २ = २४$ हुआ । इसे अन्तरवर्ग $(४ - ३)^२ = १^२ = १$ में जोड़ने पर $(२४ + १) = २५$ हुआ । यही ४ और ३ का वर्गयोग है ।

वर्गान्तर के लिये ४ और ३ का योग ७ को ४ और ३ का अन्तर १ से गुणा करने पर $(७ \times १) = ७$ हुआ । यही उन दोनों का वर्गान्तर है । शेष बाँटे मूल में स्पष्ट हैं ।

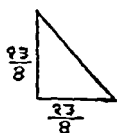
उदाहरणम् ।

साङ्ख्यत्रयमितो बाहुर्यत्र कोटिश्च तावती ।

तत्र कर्णप्रमाणं किं गणक ? त्रुहि मे त्रुतम् ॥ २ ॥

हे गणक, वहाँ $३\frac{१}{२}$ भुज है और कोटि भी उतनी ही है, वहाँ कर्ण का मान बताओ ॥ २ ॥

न्यासः ।



भुजः $\frac{१३}{४}$ । कोटिः $\frac{१३}{४}$ । अनयोर्वर्गयोगः

$\frac{१६९}{१६}$ । अस्य मूलाभावान् करणीगत एवायं कर्णः ।

उदाहरण— \therefore भुज^२ + कोटि^२ = कर्ण^२ \therefore कर्ण^२ = $(३\frac{१}{२})^२ + (३\frac{१}{२})^२ = (\frac{१३}{४})^२ + (\frac{१३}{४})^२ = (\frac{१६९}{१६} + \frac{१६९}{१६}) = \frac{३३८}{१६} = \frac{१६९}{८}$

\therefore कर्ण = $\sqrt{\frac{१६९}{८}}$ । यहाँ $\frac{१६९}{८}$ का मूल नहीं होने से करणी गत (अवगांठ) ही कर्ण का मान होगा । अवगांठ का आसन्न मूल लाने की विधि आगे कही जा रही है ।

$$\therefore य^2 = मू^2 + शो^2 = अं \times छे \times इ^2$$

$$\therefore \sqrt{\frac{अं}{छे}} = \sqrt{\frac{अं \times छे \times इ^2}{छे \times इ}} = \frac{मू}{छे \times इ} = आ \cdot नू$$

$$\begin{aligned} एवं \sqrt{\frac{अं}{छे}} &= \sqrt{\frac{अं \times छे \times इ^2 \times म \cdot इ^2}{छे \times इ \times म \cdot इ}} = \frac{य \times म \cdot इ}{छे \times इ \times म \cdot इ} \\ &= \sqrt{\frac{मू^2 + शो^2 \times म \cdot इ}{छे \times इ \times म \cdot इ}} = \sqrt{\frac{मू^2 \times म \cdot इ^2 + शो^2 \times म \cdot इ^2}{छे \times इ \times म \cdot इ}} \parallel \sqrt{\frac{मू^2 + शो^2}{छे \times इ \times म \cdot इ}} \end{aligned}$$

$$अत्र निरग्रमूलं = मू' = मू \times म \cdot इ \div इ'$$

$$\therefore \text{द्वितीयासन्नमूलम्} = \frac{मू'}{छे \cdot इ \times म \cdot इ} = \frac{मू \cdot म \cdot इ}{छे \cdot इ \cdot म \cdot इ} + \frac{इ'}{छे \cdot इ \cdot म \cdot इ}$$

$$= \frac{मू}{छे \times इ} + \frac{इ'}{छे \cdot इ \cdot म \cdot इ} \text{ । अत्र स्वरूप दर्शनेन स्पष्टं ज्ञायते यत् प्रथमासन्न-}$$

मूलादधिकं द्वितीयासन्नमूलमस्त्यत एवोक्तं भास्करेण 'वर्गेण महतेष्टेनेति ।

विशेषः—भास्करोक्त विधि से $\frac{१३}{३३}$ का आसन्नमूल = $\frac{४३}{३३३}$ । अब $\frac{१३}{३३}$ को दशमलव में परिवर्तित करने पर २११२५ हुआ । इसका दशमलव के वर्गमूल की रीति से वर्गमूल लेने पर ४५९६ हुआ । यथा—

४	२११२५० (४ ५२६१२४... इत्यादि
४	१६
८५	५१२
५	४२५
९०९	८७५०
९	८१८१
९१८६	५६२००
६	५५११६
९१९२१	१०८४००
१	९१९२१
९१९२२२	८६४७९००
९	८२७६०६१
९१९२३८४	६७४८३९००
	६६७६९५६६
	७१४३६४

यद्यपि दशमलव की रीति से वर्ग-मूल की क्रिया सरल है, फिर भी इसकी अपेक्षा भास्करोक्त रीति से लाया हुआ आसन्न मूल सूक्ष्म है ।

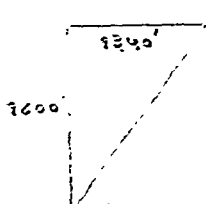
∴ २४ माइल की गति से ६ दिन में पूर्व की ओर जानेवाला जहाज
 $२४ \times ६ = १४४$ माइल चलेगा ।

इसी तरह ३२ माइल की गति से ६ दिन में दक्षिण जाने वाला जहाज
 $३२ \times ६ = १९२$ माइल चलेगा ।

∴ पूर्व और दक्षिण दिशा के बीच का कोण समकोण है, अतः ६ दिन के बाद दोनों जहाजों की दूरी उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी भुजायें १४४, और १९२ माइल हैं ।

$$\therefore \text{अभीष्ट दूरी} = \sqrt{१४४^2 + १९२^2} = \sqrt{२०७३६ + ३६८६४} = \sqrt{५७६००} \\ = २४० \text{ माइल ।}$$

(४) एक गुब्बारा (Balloon) १८०० फीट उँचाई से हवा के द्वारा
 १३५० फीट चला गया, तो जहाँ से वह उड़ाया गया था, वहाँ से
 उसकी दूरी बताओ । यहाँ उस बिन्दु से गुब्बारे की दूरी जहाँ से वह



उड़ाया गया था, उस त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी
 भुजायें १३५० और १८०० फीट हैं और इन
 भुजाओं के बीच का कोण समकोण है ।

$$\therefore \text{अभीष्ट दूरी} = \sqrt{१८००^2 + १३५०^2} = \\ \sqrt{३२४०००० + १८२२५००} = \sqrt{५०६२५००} = \\ २२५० \text{ फीट}$$

(५) एक ८५ फीट लम्बी सीढ़ी किसी घर की चोटी तक पहुँच जाती है ।

यदि घर से सीढ़ी की जड़ ४० फीट हो, तो घर की उँचाई बताओ ।

यहाँ सीढ़ी की लम्बाई, उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी
 समकोण बनाने वाली भुजायें, उस घर की उँचाई और घर से सीढ़ी की
 जड़ की दूरी हैं । तो घर की उँचाई $= \sqrt{८५^2 - ४०^2} =$

$$\sqrt{(८५+४०)(८५-४०)} = \sqrt{१२५ \times ४५} = \sqrt{२५ \times ५ \times ५ \times ९} \\ = \sqrt{२५ \times २२५} = २५ \times ३ = ७५ \text{ फीट ।}$$

(६) एक सीढ़ी किसी गली में एक घर की २० फीट उँचाई तक पहुँचती है ।

सीढ़ी की जड़ उस घर से १५ फीट दूर है । सीढ़ी की जड़ को उसी
 बिन्दु में रखते हुये गली की दूसरी ओर के एक घर में उस सीढ़ी को

- (१३) दो जहाज एक ही जगह से ३५ और १२ माइल की दूरी पर क्रमसे ईशान और आग्नेय कोण में देखे गये, तो उन जहाजों के बीच की दूरी बताओ ।
- (१४) दो स्तम्भ, जिनकी उँचाई क्रमसे ९ और १६ फीट हैं, जमीन पर सीधे खड़े हैं । यदि उनके बीच की दूरी १२ फीट है, तो एक की जड़ से दूसरे की चोटी की दूरी अलग-अलग बताओ ।
- (१५) एक गुड्वारा ठीक ऊपर की ओर २९७० फीट जाने के बाद आँधी के झोंक से उसकी लम्बरूप दिशा में ३९६० फीट तक गया, तो जहाँ से वह उड़ा था वहाँ से उसकी दूरी बताओ ।
- (१६) एक गुड्वारा प्रति घण्टा १२ माइल की गति से ६ घण्टे तक ठीक ऊपर की ओर जाने के बाद एक तूफान के कारण उसकी लम्बरूप दिशा में चलने लगा । यदि तूफान के कारण उसकी गति प्रति घण्टा २४ माइल हो गया, तो चार घण्टे के बाद गुड्वारे की दूरी उस जगह से बताओ जहाँ से वह पहले उड़ा था ।
- (१७) किसी नदी के एक किनारे १०० फीट उँचा एक मीनार है । यदि नदी की चौड़ाई ७५ फीट है, तो नदी के सामने के दूसरे किनारे से मीनार की चोटी की दूरी बताओ ।
- (१८) एक मनुष्य किसी मीनार (टावर) की जड़ से १२४ फीट चलकर मीनार की चोटी की ओर देखता है । यदि मनुष्य की उँचाई ५ फीट और मीनार की उँचाई १९७ फीट हो, तो उस मनुष्य के शिर से मीनार की चोटी की दूरी बताओ ।
- समकोण त्रिभुज के कर्ण और समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक निम्न लिखित हैं, तो दूसरी भुजा बताओ:—
- (१९) १२० फीट और ७२ फीट (२०) ८५ फीट और ५३ फीट
 (२१) ८ गज १ फीट और ६ गज २ फीट (२२) २ फीट १ इञ्च और ७ इञ्च
 (२३) किसी क्षण्डे की बाँस की चोटी से ४५ फीट लम्बी एक रस्सी लटकी है । यदि इसको खींचा जाता है, तो क्षण्डा की जड़ से २७ फीट दूर जमीन पर यह पहुँचती है, तो क्षण्डे की उँचाई बताओ ।

- (२) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण २६ फीट है, तो उसकी बराबर भुजाओं की लम्बाई बताओ।

$$\therefore \text{समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की भुजा} = \frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}} = \text{अतः} \frac{२६}{\sqrt{२}} \text{ फीट} \\ = १३\sqrt{२} \text{ फीट।}$$

- (३) एक आयत की संगति भुजायें क्रम से १६ फीट और १२ फीट हैं, तो उसका कर्ण बताओ।

$$\text{आयत का कर्ण} = \sqrt{\text{लम्बाई}^2 + \text{चौड़ाई}^2} = \sqrt{१६^2 + १२^2} \text{ फीट} \\ = \sqrt{२५६ + १४४} = \sqrt{४००} = २० \text{ फीट।}$$

- (४) किसी वर्ग की भुजा १२ फीट है, तो उसका कर्ण बताओ।

$$\text{वर्ग का कर्ण} = \sqrt{२} \text{ भु} = \sqrt{२} \times १२ \text{ फीट।}$$

- (५) एक वर्ग का कर्ण १६ फीट है, तो उसकी भुजा बताओ।

$$\text{वर्ग की भुजा} = \frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{२}} \text{। यहाँ कर्ण} = १६ \text{ फीट।}$$

$$\therefore \text{भु} = \frac{१६}{\sqrt{२}} \text{ फीट} = ८\sqrt{२} \text{ फीट।}$$

- (६) एक आयत की लम्बाई १२ फीट और उसका कर्ण १५ फीट हैं। तो उसकी चौड़ाई बताओ।

$$\text{आयत की चौड़ाई} = \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{लम्बाई}^2} = \sqrt{१५^2 - १२^2} \text{ फीट,} \\ = \sqrt{२२५ - १४४} = \sqrt{८१} = ९ \text{ फीट।}$$

- (७) एक आदमी किसी वर्गाकार मैदान के चारों तरफ २ घण्टे में घूमता है, तो उसे एक कोण से सामने के दूसरे कोण तक पहुँचने में कितना समय लगेगा।

$$\therefore \text{वर्ग के चारों भुजाओं को पार करने में २ घण्टा लगता है}$$

$$\therefore \text{ " " १ भुजा को " " } \frac{२}{४} = \frac{१}{२} \text{ घण्टा लगेगा}$$

$$\therefore \text{ " " कर्ण को " " } \sqrt{२} \times \frac{१}{२} = \frac{\sqrt{२}}{२} \text{ घंटा लगेगा।}$$

- (८) एक आदमी किसी वर्गाकार मैदान को कर्ण की राह से ५ मिनट में पार करता है। यदि उसकी गति प्रति घण्टा ४ माइल हो, तो उस मैदान का भुजयोग बताओ।

- (१०) एक वृत्त की चापजीवा ३० इञ्च और केन्द्र से उसकी दूरी ८ इञ्च है, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ ।
- (११) एक वृत्त की त्रिज्या १३ फी० है । यदि उसकी एक चापजीवा २४ फी० हो, तो केन्द्र से उसकी दूरी बताओ ।
- (१२) किसी वृत्तकी त्रिज्या ८५ गज है । यदि उसकी एक चापजीवा ६८ गज है, तो केन्द्र से उसकी दूरी बताओ ।
- (१३) वृत्त के चाप के समान एक पुल का फैलाव १०० गज और उसकी ऊँचाई १० गज हैं, तो वृत्त की त्रिज्या बताओ ।
- (१४) वृत्त-चाप के आकार के एक पुल का फैलाव २३२ गज और उसकी ऊँचाई ८ गज हैं, तो वृत्त का व्यास बताओ ।

अथ वृत्तान्तस्त्र्यन्त्रादिनवान्त्रान्तक्षेत्राणां भुजमानानयनाय—
करणसूत्रं वृत्तत्रयम् ।

त्रिद्व्यङ्गाग्निभश्चन्द्रैस्त्रिवाणाष्टयुगाष्टभिः ।

वेदाग्निवाणखाश्वश्च खखाभ्राभ्रसैः क्रमात् ॥ ४५ ॥

वाणेपुनखवाणैश्च द्विद्विनन्देषुसागरैः ।

कुरामदशवेदैश्च वृत्तव्यासे समाहते ॥ ४६ ॥

खखखाभ्राकै संभक्ते लभ्यन्ते क्रमशो भुजाः ।

वृत्तान्तस्त्र्यस्रपूर्वाणां नवाम्भ्रान्तं पृथक् पृथक् ॥ ४७ ॥

वृत्तान्तगणन सम त्रिसुत्र से लेकर नव नवसुत्र क्षेत्र पर्यन्त सभी समसुत्र क्षेत्र के भुज जानने के लिये वृत्त के व्यास को क्रम में १०३९२३, ८४८५३, ७०५३४, ६००००, ५२०५५, ४५९२२, ४१०३१ इन संख्याओं से अलग-अलग गुणा कर सबों में १२०००० से भाग देना चाहिये । उक्त प्रकार से लब्धियाँ क्रम से सम त्रिसुत्रादि क्षेत्रों की भुजायें होंगी हैं ।

उपपत्तिः—वृत्तान्तगणनसमत्रिसुत्रादिक्षेत्रेषु क्रमेण परिविन्ध्यंशादिपूर्वज्या-सम एको सुत्रो भवति । ततः द्वादशाष्टव्यासे नृचमज्यासाधनविधिना यदि समत्रिसुत्रादीनां भुजाः माध्वन्ते तदात्रे क्रमेण त्रिद्व्यङ्गाग्निभश्चन्द्रादिभित्ता

एक वार में नारदीय महापुराण पढ़ रहा था तो मुझे बड़ा आश्चर्य हुआ जब कि 'लीलावती' के अनुरूप श्लोक मिलने लगे। कुछ श्लोक नाचे दिये जाते हैं :—

योगान्तर के सूत्र :—

'क्रमादुक्रमतो वापि योगः कार्योन्तरं तथा' ।

गुणनादि के सूत्र :—

हन्याद्गुण्येन गुण्यं स्थानेनैवोपान्तिमादिकान् ।
शुद्धे हरो यद्गुणश्च भाज्यान्त्या तत्फलं मुने ॥
समाहृतोऽथो वर्गः स्यात्तमेवाहुः कृति बुधाः ।
अन्या तु विदमात् त्यक्त्वा कृति मूलं न्यसेत्पृथक् ॥
द्विगुणेनानुना भक्तं फलं मूले न्यसेत् क्रमान् ।
तत्कृतिं च न्यजेद्विप्र मूलेन विभजेत् पुनः ॥
एवं सुहूर्वागमूलं जायते च सुनीधर ।
समन्वयकहतिः प्रोक्तो..... इत्यादि ॥

भिन्नपरिकर्माष्टक के सूत्र :—

अन्योन्यहाराभिहतौ हराशौ तु समच्छिदा ।
लवालवन्नाश्च हराहरन्ना हि सवर्णनम् ॥
भागप्रभागे विज्ञेयमिन्यादि..... ।

व्यस्तविधि का सूत्र टांक-टीक लीलावती का है। इष्ट कर्म आदि के सूत्र में भी थोड़ा अन्तर दीख पड़ता है। जिज्ञासुओं के लिये उक्त पुराण का ५४वाँ अध्याय अवश्य द्रष्टव्य है।

मेरी समझ से श्री भास्कराचार्य वैष्णव धर्म और नारदीय पुराण भी वैष्णवसम्प्रदाय का है। इस हेतु ग्रन्थकार को उसका आधार लेना सम्भवपरक है। उदाहरण के श्लोक पुराण में नहीं हैं।

इस ग्रन्थ की अन्य टीका रहने पर भी मेरी टीका की आवश्यकता इसलिये हुई कि जिसमें प्राचीन गणित के साथ नवीन गणित भी संस्कृत के छात्र सीख सकें। टीका में ग्रन्थ के क्रमानुसार नवीन गणित के साथ विविध प्रकार के ग्रन्थासार्थ उदाहरण दिये गये हैं। इसमें वर्तमान समय की वस्तु की परिभाषा,

विषय	पृ०
स्थूल जीवाज्ञार्थ सूत्र	२९८
चापानयनाय सूत्र	३००
खात व्यवहार	३०३
खात व्यवहार्थ सूत्र	३०३
खात का समक्षेत्र फल, स्पष्ट घन- फल एवं सूची खात के घन- फलार्थ सूत्र	३०४
चित्ति व्यवहार	३१०
चित्ति के घनफलादि ज्ञानार्थ सूत्र	”
क्रकच व्यवहार	३१२
चिराई करानेवाली लकड़ी के फलार्थ सूत्र	”
राशि व्यवहार	३१४
स्थूल आदि धान राशि की परिधि क्रम से वेध एवं घन हस्त (खारी) ज्ञानार्थ सूत्र	”
भित्त्यन्तर्वाह्य कोण संलग्न राशि प्रमाण ज्ञानार्थ सूत्र	३१६
छाया व्यवहार— छायान्तर एवं कर्णान्तरवश छाया ज्ञानार्थ सूत्र	३१९
शंकुप्रदीपान्तर भूमि, शंकु एवं दीपोद्धितिज्ञानवश छाया ज्ञानार्थ सूत्र	३२२
दीपोद्धिति ज्ञानार्थ सूत्र	३२३
प्रदीप शंकुन्तर भूमि ज्ञानार्थ सूत्र	३२४
छाया प्रदीपान्तर—भूमि एवं दीपोच्च ज्ञानार्थ सूत्र	३२५

विषय	पृ०
कुट्टक व्यवहार—	
कुट्टकार्थ सूत्र	३२९
धनात्मक क्षेप में विशेष सूत्र	३३८
क्षेपाभावादि स्थल में गुण एवं लब्धि के निमित्त विशेष सूत्र	३४१
कुट्टक में अनेक गुण-लब्धि प्रदर्श- नार्थ सूत्र	३४३
स्थिर कुट्टकार्थ सूत्र	”
ग्रह गणितोपयोगि वि० सू०	३४४
संक्षिप्त कुट्टकार्थ सूत्र	३४६
अङ्कपाश—	
निर्दिष्टाङ्कद्वारा संख्या के भेदादि ज्ञानार्थ सूत्र	३४८
विशेष सूत्र	३५०
अनियत एवं अतुल्य अंकों की संख्या के भेद ज्ञानार्थ सूत्र	३५२
अङ्कपाश की विशेषता और ग्रन्थ की प्रशंसा कथन	३५५
परिशिष्ट	
मैट्रिक प्रणाली	३५७
गणित-सम्बन्धी कुछ पाश्चात्य शब्दों के नाम	३६०
ग्रन्थ सम्बन्धी कुछ संकेतयुक्त शब्दों का अर्थ	३६२
उपसंहार के श्लोक	३६४

विषय	पृ०
स्थूल जीवाज्ञार्थ सूत्र	२९८
चापानयनाय सूत्र	३००
खान व्यवहार	३०३
खान व्यवहार्य सूत्र	३०३
खान का समन्वय फल, स्पष्ट घन- फल एवं सूची खान के घन- फलार्थ सूत्र	३०४
चिनि व्यवहार	३१०
चिनि के घनफलादि ज्ञानार्थ सूत्र	”
क्रकच व्यवहार	३१२
चिराई करानेवाली लकड़ी के फलार्थ सूत्र	”
राशि व्यवहार	३१४
स्थूल आदि धान राशि की परिधि क्रम से वेध एवं घन हस्त (खारी) ज्ञानार्थ सूत्र	”
नित्यन्तर्वाह्य कोण संलग्न राशि प्रमाण ज्ञानार्थ सूत्र	३१६
झाया व्यवहार— झायान्तर एवं कर्णान्तरवश झाया ज्ञानार्थ सूत्र	३१९
शंकुप्रदीपान्तर भूमि, शंकु एवं दीपोद्भित्तिज्ञानवश झाया ज्ञानार्थ सूत्र	३२२
दीपोद्भित्ति ज्ञानार्थ सूत्र	३२३
प्रदीप शंकुन्तर भूमि ज्ञानार्थ सूत्र	३२४
झाया प्रदीपान्तर—भूमि एवं दीपौच्य ज्ञानार्थ सूत्र	३२५

विषय	पृ०
कुट्टक व्यवहार—	
कुट्टकार्थ सूत्र	३२९
धनात्मक जेप में विशेष सूत्र	३३८
जेपाभावादि स्थूल में गुण एवं लब्धि के निमित्त विशेष सूत्र	३४३
कुट्टक में अनेक गुण-लब्धि प्रदर्श- नार्थ सूत्र	३४३
स्थिर कुट्टकार्थ सूत्र	”
ग्रह गणितोपयोगि वि० सू०	३४४
संक्षिप्त कुट्टकार्थ सूत्र	३४६
अङ्कपाश— निर्दिष्टाङ्कद्वारा संख्या के भेदादि ज्ञानार्थ सूत्र	३४८
विशेष सूत्र	३५०
अनियत एवं अनुत्पन्न अंकों की संख्या के भेद ज्ञानार्थ सूत्र	३५२
अङ्कपाश की विशेषता और ग्रन्थ की प्रशंसा कथन	३५५
परिशिष्ट	
मैट्रिक प्रणाली	३५७
गणित-सम्बन्धी कुछ पाश्चात्य शब्दों के नाम	३६०
ग्रन्थ सम्बन्धी कुछ संकेतयुक्त शब्दों का अर्थ	३६२
उपसंहार के श्लोक	३६४

तथा शेषरहित पदों से युक्त एवं मातुर्यं से नरी हुई 'लीलावती' नामक पाठ-
गणित को कहता हूँ ।

अथ परिभाषा

त्रादौ मुद्राणां परिभाषा—

वराट्कानां दशकद्वयं यत् सा काक्किणी ताश्च पणश्चतस्रः ।

ते षोडश द्रम्म इहावगमन्यो द्रम्मैस्तथा षोडशभिश्च निष्कः ॥२॥

वराट्कानां दशकद्वयं (२०) यत् सा काक्किणी भवति । ताः चतस्रः पणः, ते
षोडश पणाः द्रम्मः, तथा इह षोडशभिः द्रम्मैः निष्कः अवगम्यः ॥ २ ॥

बीस कौड़ी की एक काक्किणी और चार काक्किणी का एक पण एवं सोलह
पणों का एक द्रम्म होता है। इस शान्त्र में सोलह द्रम्नों का एक निष्क समझना
चाहिए। प्राचीन राजमुद्राओं का ज्ञान है ॥ २ ॥

भारपरिमाणम्—

तुल्या यवान्यां कथिताऽत्र गुञ्जा बल्लव्त्रिगुञ्जो धरणं च तेऽष्टौ ।

गद्याणकस्तद्द्वयमिन्द्रतुल्यैर्वल्लैस्तुल्यैको घटकः प्रदिष्टः ॥३॥

अत्र यवान्यां तुल्या गुञ्जा कथिता, त्रिगुञ्जः बल्लः, तेऽष्टौ धरणं, तद्द्वयं
(धरणद्वयं) गद्याणकः, तथा इन्द्रतुल्यैः बल्लैः एकः घटकः च प्रदिष्टः ॥ ३ ॥

दो बलों के समान एक गुञ्जा, तीन गुञ्जा का एक बल्ल, आठ बलों का एक
धरण, दो धरण का एक गद्याणक और चौदह बल्ल का एक घटक होता है ॥३॥

नायादिमानम्—

दशार्धगुञ्जं प्रवदन्ति मापं मापाह्वयैः षोडशभिश्च कर्पम् ।

कर्पैश्चतुभिश्च पलं तुलाज्ञाः कर्पं सुवर्णस्य सुवर्णसंज्ञम् ॥४॥

तुलाज्ञाः दशार्धगुञ्जं मापं, षोडशभिः मापाह्वयैः कर्पं, चतुर्भिः कर्पैश्च पलं
प्रवदन्ति । सुवर्णस्य कर्पं सुवर्णसंज्ञं भवतीति ॥ ४ ॥

तौलना ज्ञानने वाले विशेषज्ञ पाँच गुञ्जा का एक माप, सोलह माप का
एक कर्प और चार कर्प का एक पल कहते हैं। सोने का कर्प सुवर्ण संज्ञक है
अर्थात् १ कर्प = १ सुवर्ण का है ॥ ४ ॥

२० शिलिंग = १ पौण्ड, २१ शिलिंग = १ मित्री

अ० तौल की परिभाषा

२४ ग्रेन = १ पेनीवेट, २० पेनीवेट = १ औन्स

१६ औन्स = १ पौण्ड, २८ पौण्ड = १ क्वार्टर

४ क्वार्टर = १ हण्डर, २० हण्डर = १ टन

१ टन = २७ मन ८ सेर १४^३/_४ छटांक ।

अ० लम्बाई—

१२ इञ्च = १ फूट, ३ फूट = १ गज

५^३/_४ गज = १ पोल, ४० पोल = १ फर्लांग

८ फर्लांग = १ मील, ३ मील = १ लीग

१८ इञ्च = १ हाथ, २ हाथ = १ गज

भूमि की अ० माप—

१४४ वर्ग इञ्च = १ वर्ग फूट, ९ व० फीट = १ वर्ग गज

३०^३/_४ वर्ग गज = १ व० पोल, ४० व० पो० = १ रुड़

४८४० वर्ग गज = १ एकड़, ६४० ए० = १ व० मील

४८४ वर्ग गज = १ वर्गजरीव, १७२८ घन इञ्च = १ घ० फूट

२७ घन फीट = १ घन गज

योगान्तरादिका संकेतित चिह्न—

योग = + = Addition = ऐडिशन = पूस

अन्तर = - = Substraction = सबस्ट्रैकशन = माइनस

गुणा = × = Multiplication = मल्टीप्लिकेशन = इनटू

भाग = ÷ = Divide = डिवाइड = डिवाइड

वर्ग = २ = Square = स्कायर = स्कायर

वर्गमूल = √ = Square-root = स्कायर रूट = स्कायर रूट

घन = ३ = Cube = क्यूब = क्यूब

घनमूल = √^३ = Cube root = क्यूब रूट = क्यूब रूट

दशमलव = = Decimal = डेसिमल = डेसिमल

इति परिभाषा ।



चायुतं चायुतं नियुतं च नियुतं च प्रयुतं चार्जुदं च समुद्रश्च मध्यं चान्तश्च परार्धश्चैता मे अत्र दृष्टका धेनवः सन्वमुत्रामुस्मिन् लोके' । अत्र केवलं कोटि-खर्व-निखर्व-महापद्म-शंकुसंज्ञानां संख्यास्थानानामुल्लेखो नास्त्यन्यत्सर्वं समान-मेवातोऽनुसीयते मया यत् प्रग्येऽस्मिन् या गणनारीतिस्तस्या आधारो वेद एव भवेत् नान्यः ।

अत्र नवीनाः वदन्ति यत्—पुरा साधनाभावात् सर्वे जनाः स्वहस्तयोर्दशा-ङ्गुलिभिः गणनाकार्यं कुर्वन्ति स्म, तेन दशस्थाने दशकं, दशदशकस्थाने शतकं, दशशतकस्थाने सहस्रमित्यादि संज्ञाः कृताः । व्यवहारे परार्धपर्यन्तस्यैवाङ्कस्य-प्रयोजनं भवत्यतः परार्धान्तमेवोक्तमिति ॥ २-३ ॥

अथ सङ्कलितव्यवकलितयोः करणसूत्रं वृत्तावेम्—

कार्यः क्रमादुत्क्रमतोऽथ वाऽङ्कयोगो यथास्थानक्रमन्तरं वा ।

क्रमात् अथवा उत्क्रमतः यथास्थानकं (यथास्थानस्थितानामङ्कानामर्थात् एकस्थानीयाङ्कानामधः एकस्थानीयाङ्कान् दशमस्थानीयाङ्कानामधः दशमस्थानी-याङ्कान् संस्थाप्य तत्तत्समानस्थानीयाङ्कैः तत्तत्समानस्थानीयाङ्कानां) अङ्कयोगः कार्यः वा अन्तरं कार्यम् ॥

क्रम से वा उत्क्रम (उलटी रीति) से यथा स्थानस्थितअङ्कों का अर्थात् एकस्थानीय अङ्कों के नीचे एकस्थानीय अङ्कों को, एवं दशस्थानीय अङ्कों के नीचे दशस्थानीय अङ्कों को तथा शतस्थानीय अङ्कों के नीचे शतस्थानीय अङ्कों को रखकर उन तुल्यस्थानीय अङ्कों का योग वा अन्तर करना चाहिए ।

उपपत्तिः—समानजात्योरेव योगान्तरं भवतीति नियमादेकादिस्थानीयाङ्के-ष्वेकादिस्थानीयाङ्कस्य योगो वियोगो वा समुचितमत एव यथास्थानस्थित-मित्युक्तं भास्करेण ।

अत्रोद्देशकः (प्रश्नः)—

अत्रे वाले लीलावति भतिमति ब्रूहि सहितान्

द्विपञ्चद्वारिंशत्त्रिनवतिशताष्टादश दश ।

शतोपेतानेतानयुतवियुतांश्चापि वद मे

यदि व्यक्ते युक्तिव्यवकलनमार्गेऽसि कुशला ॥ १ ॥

क्रम रीति से अन्तर करने के लिए ३२५ के नीचे १२५ को रख दिया। बाद में दाहिनी तरफ के ऊपर वाले ५ में नीचे का ५ घटाया तो बचा शून्य, उसको लिखा। फिर २ में २ घटाया तो शेष शून्य को पहले के शून्य से बाँयी तरफ लिखा। अन्त में ३ में १ घटाया तो २ शेष रहा, इसको लिखा हुआ शून्य की बाँयी तरफ लिख दिया तो ऐसा हुआ—२००। यही उन दोनों अङ्कों का अन्तर हुआ।

उत्क्रम रीति से घटाना हो तो घटने वाले अङ्कों को ऊपर लिखो और जिसमें घटेगा उनको नीचे लिख कर बाँयी ओर से घटाना प्रारम्भ करो। जैसे ३२५ में १३५ घटाना है तो ३२५ के ऊपर १३५ को लिखा। अब नीचे की बाँयी बगल में ३ है अतः ३ में ऊपर के १ को घटाया तो शेष २ बचा, लेकिन आगे २ में ३ नहीं घटेगा अतः शेष २ को लिखा। १ हाथ में १ दहाई लेकर २ में जोड़ा तो १२ हुआ, इसमें ऊपर वाले ३ को घटाया तो शेष ९ रहा। इसको पहले शेष की दाहिनी तरफ लिख दिया क्योंकि आगे ५ में ५ घट जायेगा। अब ५ में ५ घटाया तो शून्य शेष रहा। इसको लिखित शून्य से दाहिनी तरफ लिख दिया तो अन्तर १९० हुआ।

इति सङ्कलितव्यवकलिते ।

अथ गुणने करणसूत्रं सार्धवृत्तद्वयम्—

गुण्यान्त्यमङ्कं गुणकेन हन्यादुत्सारितेनैवमुपान्तिमादीन् ॥ ४ ॥

गुण्यान्त्यमङ्कं गुणकेन हन्यात् । एवं उत्सारितेन (अग्रप्रचालितेन) उपान्तिमादीन् हन्यात् ॥ ४ ॥

जिसको गुणा किया जाय उसे गुण्य और जिससे गुणा किया जाय उसको गुणक कहते हैं। गुण्य के अन्तिम अङ्क को गुणक से गुणा करे, फिर उसी गुणक को आगे बढ़ा कर उपान्तिमादि (क्रम से अगले-अगले अङ्कों को) गुणा करे।

विशेष—यहाँ केवल सूत्रार्थ से गुणा करने की विधि स्पष्ट नहीं होती अतः उदाहरण के साथ दिखाता हूँ। जैसे १३५ को १२ से गुणा करना है तो गुण्य का अन्तिम अङ्क ५ को १२ से गुणा किया तो फल १२ हुआ इसको ५ के ऊपर लिख कर ५ को मार कर गुणक को ३ के सामने रक्खा। अब ३ को १२ से गुणा किया तो फल ३६ हुआ, इसमें से ६ को ३ के ऊपर लिखा और

तृतीयः प्रकारः

भक्तो गुणः शुष्यति येन तेन लब्ध्या च गुण्यो गुणितः फलं वा ॥

वा येन (भङ्गेन) भक्तः (सन्) गुणः शुष्यति, तेन (भङ्गेन) लब्ध्या च गुण्यः गुणितस्तदा फलं स्यादिति ।

जिस अंक से भाग लेने पर गुणक कट जाय उससे और लब्धि से गुण्य को गुणा करने पर गुणनफल होता है ।

जैसे—गुणक १२ को ३ से भाग देने पर कट गया और लब्धि ४ हुई । अब गुण्य १३५ को ३ और ४ से गुणा करने पर $१३५ \times ३ \times ४ = १६२० =$ गुणनफल ॥ ५ ॥

चतुर्थः प्रकारः

द्विधा भवेद्रूपविभाग एवं स्थानैः पृथग्वा गुणितः समेतः ॥

वा स्थानैः (एकादिस्थानस्थिताङ्कैः) (गुण्यः) पृथक्-पृथक् गुणितः समेतः (योगः कार्यस्तदा) फलं भवति । एवं रूपविभागः द्विधा भवेत् ।

गुणक के एकादिस्थानीय अङ्कों से गुण्य को अलग-अलग गुणा कर एकादि स्थान क्रम से लिखकर योग करने से गुणनफल होता है । जैसे—गुणक १२ में इकाई का अंक २ और दहाई का अंक १ है, अतः गुण्य १३५ को उन दोनों से गुणा करने पर क्रम से २७० और १३५ हुए । चहाँ दशस्थानीय अंक से गुणित गुण्य १३५ है अतः २७० के नीचे दशस्थानीयादि अंकों के नीचे लिख कर जोड़ने से १६२० गुणनफल हुआ ॥

पञ्चमः प्रकारः

इष्टोनयुक्तेन गुणेन निम्नोऽभीष्टगुण्यान्वितवर्जितो वा ॥ ६ ॥

वा इष्टोनयुक्तेन गुणेन निम्नः गुण्यः अभीष्टगुण्यान्वितवर्जितस्तदा फलं स्यादिति ॥ ६ ॥

इष्ट (कल्पित अंक) से ऊन (घटाया हुआ) और युक्त जो गुणक उससे गुण्य को गुणाकर, उसमें इष्ट से गुणे हुए गुण्य को क्रम से जोड़ने और घटाने से गुणनफल होता है ।

द्वेवाले बालकुरङ्गलोलनयने लीलावति ! कस्याग्नि ! यदि ह्यस्यान-
विभागखण्डगुणने कस्याऽसि, तर्हि पञ्चम्येक (१३५) मित्ताऽद्वाः दिवाकर-
गुणाः कति स्युः, इति प्रोच्यताम् । अथ च ते गुणिताः अद्वाः तेन गुणेन
द्विधाः (भक्ताः सन्तः) जाताः कति स्युः । इति भागहार प्रश्नः ।

हे बाले बालकुरङ्गलोलनयने कस्याग्नि लीलावति ! यदि ह्य, स्थानविभाग
और खण्ड गुणन की रीति से गुणा करने में शक्तिमति हो, तो १३५ को १२ से
गुणा करने पर क्या होगा सो कहो और गुणनफल को उसी गुणक से भाग देने
पर लब्धि क्या होगी वह भी बताओ ॥

न्यासः । गुण्यः १३५ । गुणकः १२ ।

गुण्यान्त्यमङ्कं गुणकेन हन्यादिति कृते जातम् १६२० ।

अथवा गुणरूपविभागे खण्डे कृते न । ४ । आभ्यां पृथग् गुण्ये गुणिते
युते च जातम् १६२० ।

अथवा गुणकद्विभिर्भक्तो लब्धम् ४ । एभिद्विभिश्च गुण्ये गुणिते
जातं तदेव १६२० ।

अथवा स्थानविभागे खण्डे १ । २ । आभ्यां पृथग्गुण्ये गुणिते यथा-
स्थानयुते च जातं तदेव १६२० ।

अथवा द्वयूनेन १० । गुणेन, द्वाभ्यां च । २ पृथग्गुण्ये गुणिते युते
च जातं तदेव १६२० ।

अथवाऽष्टयुतेन गुणेन २० गुण्ये गुणितेऽष्ट-न गुणितगुण्यहीने च
जातं तदेव १६२० ।

इति गुणनप्रकारः ।

सूत्रार्थ में ही इन सबों का गणित दिज्ञाया गया है ।

गुणनपरिशिष्ट—

(१) यदि किसी संख्या को ५, ५^२, ५^३, ५^४.....से गुणा करना हो,
तो उस संख्या पर क्रम से १, २, ३ आदि शून्य रख कर उन्हें २, २^२, २^३....
आदि संख्या से भाग दें तो इष्ट गुणनफल होंगे ।

जैसे ९३२ को ५^२ से गुणा करना है तो ९३२ पर दो शून्य रखकर
९३२००, दो का वर्ग ४ से भाग दिया तो २३३०० हुआ, यही उन दोनों
अङ्कों का गुणनफल हुआ ।

लब्धिर्भवतीति स्फुटम् । अथवा समेनाङ्केनापवर्तिताभ्यामपि भाज्य हराभ्यां लब्धौ
विकाराभावात्तथोक्तमाचार्येणेति ॥ ७ ॥

अत्र पूर्वोदाहरणे गुणिताङ्कानां स्वगुणच्छेदान् । भागहारार्थं
न्यासः । भाज्यः १६२० । भाजकः १२ ।

भजनाल्लब्धो गुण्यः १३५ ।

अथवा भाज्यहारौ त्रिभिरपवर्तितौ $\frac{५५०}{४}$ चतुर्भिर्वा $\frac{५०५}{३}$
इति भागहारः ।

उदाहरण—भाज्य १६२०, भाजक १२, यहाँ भाज्य में अन्तिम अङ्क १
है, अतः १२ नहीं घटा । इसलिये अन्तिम अङ्क १६ मान कर उसमें १२ एक
घार घटाकर शेष ४ पर २ उतारा तो ४२ हुआ । लब्धि की जगह १ लिखा ।
अब ४२ में १२ तीन बार घटता है अतः शेष ६ बचा, उस पर शून्य उतारा
तो ६० हुआ । लब्धि १ की दाहिनी वगल ३ लिखा । ६० में फिर १२ पांच
बार घटा शेष शून्य रहा और लब्धि ५ हुई । भाज्य में अब अङ्क नहीं है
इस हेतु क्रिया समाप्त हो गयी । लब्धि १३५ हुई ।

दूसरा प्रकार—भाज्य १६२० । भाजक १२ । यहाँ भाज्य और भाजक
दोनों में ४ से अपवर्तन दिया, तो भाज्य की लब्धि ४०५, और भाजक की
लब्धि ३ हुई । अब ४०५ को ३ से भाग देने पर लब्धि १३५ हुई । यह
पहली रीति से आई हुई लब्धि के समान ही है ॥ ७ ॥

भागहार परिशिष्ट—

(१) भागहार में जो भाज्य, भाजक से पूरा पूरा बँट जाय उसे—पूर्ण
भाज्य, और शेष वाले को अपूर्ण भाज्य कहते हैं ।

खण्ड भागहार—

(२) खण्डभागहार में भाज्य को, भाजक के ऐसे टुकड़ों से, जिनका
गुणनफल भाजक के बराबर हो, लगातार भाग देने से भागफल होता है ।

यथा—भाज्य १६२० भाजक १२ । यहाँ $१२ = २ \times २ \times ३$ । अतः—
 $१६२० \div २ = ८१०$ । $८१० \div २ = ४०५$ । $४०५ \div ३ = १३५ =$ उत्तर ।

अपूर्ण भाज्य का उदाहरण—भाज्य ११४३ भाजक ४५ । परन्तु
 $४५ = ५ \times ३ \times ३$ । अब $११४३ \div ५ = २२८$ । प्र० शेष = ३ । अब

से अधिक संख्या कट जाय। लघ्वियाँ और नहीं कटी हुई संख्याओं का नीचे लिखकर फिर ऐसी संख्या से भाग दें जिससे दो या दो से अधिक संख्या निःशेष हो जाय। इस तरह बार-बार तब तक क्रिया करनी चाहिए, जब तक पंक्ति में ऐसे अङ्क हो जाँय जो किसी से न कटे। अन्त में सभी अङ्कों के घात को भाजकाङ्कों के घात से गुणा करने पर जो हो, वह पंक्तिस्य संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य होता है।

जैसे २, ५, ८, १५, इनका लघुतम समापवर्त्य निकालना है, तो इनको एक पंक्ति में स्थापित कर २ से भाग देने पर २ और ८ कटे। नीचे लघ्वियाँ और बचे हुए अङ्कों को उतारने से १, ५, ४, १५, हुए। भाजक २ को अलग रखा। अब ५ से भाग देने पर ५ और १५ कटे, लघ्वि १ और ३ हुईं। फिर १, १, ४, और ३ को नीचे उतारा। भाजक ५ को अलग रखा। अब ये अङ्क नहीं कटते, अतः सभी अङ्कों का घात $1 \times 1 \times 4 \times 3 = 12$ को सभी भाजकाङ्कों का घात $2 \times 5 = 10$ से गुणा किया, तो $12 \times 10 = 120$ यही लघुतम हुआ।

लिखने का तरीका—

वा—

२	<u>२, ५, ८, १५,</u>	२	३२, ८०
५	<u>१, ५, ४, १५,</u>	२	१६, ४०
	<u>१, १, ४, ३,</u>	२	८, २०
∴ लघुतम =	$2 \times 5 \times 2 \times 3 = 120$	२	४, १०
			<u>२, ५</u>

$$\therefore \text{लघुतम} = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 120$$

(३) उत्पादक के द्वारा लघुतम समापवर्त्य निकालना।

जिन संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालना हो, उनका अलग-अलग उत्पादक निकाल कर उन टुकड़ों का जो सबों में शामिल रहें, जो दो संख्याओं में शामिल रहें तथा जो एक ही संख्या में रहें—गुणनफल अभीष्ट लघुतम समापवर्त्य होता है।

तीसरी संख्या का महत्तम समापवर्तक निकालना चाहिए। इसी तरह इच्छित संख्या पर्यन्त क्रिया करने से अन्त का फल जो होगा वही इच्छित संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगा। जैसे—१५, २५ और ४ का निकालना है तो पहले १५ और २५ का निकाला तो २ हुआ। अब २ और ४ का निकाला तो २ ही हुआ। अतः उन सबों का महत्तम समापवर्तक २ हुआ।

उत्पादक के द्वारा महत्तम समापवर्तक निकालना—

(४) जिन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक निकालना हो, उनका अलग-अलग उत्पादक निकाल कर जो-जो उत्पादक सबों में शामिल हो उनका गुणनफल उन सभी संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होता है।

यथा २५, ४५, ६०, ८५ इनका निकालना है, तो इनका अलग-अलग उत्पादक निकालने पर—

$$२५ = ५ \times ५ । ४५ = ३ \times ३ \times ५ । ६० = ३ \times २ \times २ \times ५ ।$$

८५ = ५ \times ५ । यहाँ देखने से स्पष्ट मालूम होता है कि ५ सबों में शामिल है, अतः उक्त संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ५ हुआ। जहाँ ३ से अधिक टुकड़े सबों में शामिल हो, वहाँ उक्त सभी टुकड़ों का गुणन फल इष्ट महत्तम समापवर्तक होता है।

महत्तम समापवर्तक निकालो—

(१) ४८, ७६ (२) ९२, २३८ (३) ३०७, १२२८ (४) १२३२१, ६६२७ (५) ५८५०, १०२८५ (६) २४७२०, ८२६७६२ (७) ८०५, १९७८, १३११ (८) २६, ३९, ६५, ११७ (९) ४२, ४९, ६३ (१०) ३५८०, २५२३४८ ।

इति महत्तम समापवर्तनम् ।

वर्गे करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनित्राः ।
स्वस्योपरिष्ठाच्च तथाऽपरेऽङ्कास्त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम् ॥
खण्डद्वयस्याभिहितिद्विनित्री तत्खण्डवर्गेऽन्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यादिष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥ ९ ॥

जोड़ने और घटाने पर १०, ६ हुये । इन दोनों का घात $१० \times ६ = ६०$ में हृष्ट २ का वर्ग ४ जोड़ दिया तो $६० + ४ = ६४$ वर्ग हुआ ।

उपपत्ति:—द्वयोस्तुल्यसंख्ययोर्घातो वर्गः कथ्यते, इति तु परिभाषा-
रूप एव ॥ १ ॥

कल्प्यते $अ = क + ग$ । $\therefore अ^2 = अ \times अ = (क + ग)(क + ग) =$
 $क^2 + क ग + क ग + ग^2 = क^2 + २ क ग + ग^2$ । अस्यावलोकनेनैव 'स्थाप्योऽ-
न्यवर्गः द्विगुणान्यनिम्न' इति पद्यं तथा 'खण्डद्वयस्याभिहतिद्विनिम्नी' इति पद्यं
च समुपपन्नं भवति । अथ वर्गान्तरं तु योगान्तरघातसमो भवतीति नियमात्—
 $रा^2 - इ^2 = (रा + इ)(रा - इ)$ । $\therefore रा^2 = (रा + इ)(रा - इ) + इ^2$ ।

अत उपपन्नश्चतुर्थः प्रकारः । इति ।

अत्रोद्देशकः ।

सखे नवानां च चतुर्दशानां ब्रूहि त्रिहीनस्य शतत्रयस्य ।

पञ्चोत्तरस्याप्ययुतस्य वर्गं जानासि चेद्द्वर्गविधानमार्गम् ॥ १ ॥

हे मित्र यदि तुम वर्ग करने की विधि जानते हो, तो—९, १४, २९७ और
१०००५ का वर्ग बताओ ।

न्यासः । ६ । १४ । २६७ । १०००५ । एषां यथोक्तकरणेन जाता वर्गाः ।
८१ । १६६ । ८८२०६ । १००१०००२५ ।

अथ वा नवानां खण्डे (४ । ५) अनयोराहति—(२०) द्विनिम्नी
(४०) तत्खण्डवर्गक्येन (४१) युता जाता सैव कृतिः ८१ ।

अथ वा चतुर्दशानां खण्डे (६ । ८) अनयोराहति—(४८) द्विनिम्नी
(६६) तत्खण्डवर्गो (३६ । ६४) अनयोरैक्येन (१००) युता जाता
सैव कृतिः १६६ ।

अथ वा खण्डे (४ । १०) तथापि सैव कृतिः १६६ ।

अथ वा राशिः २६७ । अयं त्रिभिरूनः पृथग्युतश्च २६४ । ३०० ।

अनयोर्घातः ८८२०० । त्रिवर्ग-६ युतो जातो वर्गः स एव ८८२०६ ।
एवं सर्वत्रापि ।

इति वर्गः ।

(५) ५३८८

(८) २९३२१६

(६) ८३९२६६

(९) ८८२०३३५५

(७) ५८२०३६

(१०) ३५३२५०

इति ।

अथ वर्गमूलविधिः ।

वर्गमूले करणसूत्रं वृत्तम् ।

त्यक्त्वाऽन्याद्विषमात्कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्दृष्टे
त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्प्यं द्विनिम्नं न्यसेन् ।

पङ्क्त्यां पङ्क्तिहृते समेऽन्यविषमान् त्यक्त्वाऽऽप्तवर्गं फलं

पङ्क्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति सुहुः पञ्चेर्दलं स्यात् पदम् ॥१०॥

अन्यात् विषमात् कृतिं त्यक्त्वा मूलं द्विगुणयेत्, तद्दृष्टे समे लब्धकृतिं तदाद्यविषमात् त्यक्त्वा ल्प्यं द्विनिम्नं पङ्क्त्यां न्यसेत् । समे पञ्चिहृते अन्यविषमात् आप्तवर्गं फलं त्यक्त्वा तद्द्विगुणं पङ्क्त्यां न्यसेत् इति सुहुः क्रिया-
कायां, तदा पञ्चेर्दलं पदं स्यात् ॥ १० ॥

त्रिस संख्या का वर्गमूल निकालना हो उसके अन्तिम विषम अङ्क में त्रिस संख्या का वर्ग घटे उसके बड़ाकर उसी संख्या को दूना करके सम अङ्क में भाग दें, लब्धि के वर्ग को आद्य विषम में बड़ाकर लब्धि को दूनाकर एक स्थान में रखकर सम अङ्क में भाग दें । तब लब्धि के वर्ग को अन्य विषम में बड़ा दें, मूल को दूना कर पंक्ति में रखें । इस प्रकार अब तक अङ्क निःशेष न हो जाय तब तक क्रिया करनी चाहिए । अन्त में पंक्ति का आधा वर्गमूल हो जायगा । इसका भाव यह है कि त्रिस २ अङ्क का वर्ग बटाया जाय उस २ अङ्क को द्विगुणित कर एक २ स्थान बड़ाकर लिखें । अन्त में त्रिसका वर्ग घटे उसे भी दूनाकर लिख दें । शेष में सबों का योगाद्य करने पर वर्गमूल के समान होता है । इसके मुख्य वर्गमूल न हो तो उसे अशुद्ध जानना चाहिए ॥ १० ॥

उपपत्तिः—(क + ग)^२ = क^२ + २ क ग + ग^२, अत्र स्वरूपावलीकनेन

८ वन के ऊपर ८ लिखकर उसके दायें भाग में एक स्थान बढ़ाकर ९ लिखा । बाद में आदिम अङ्क ७ के वर्ग ४९ को त्रिगुणित अन्तिमाङ्क (३ × २) = ६ से गुणा करने से २९४ हुआ । इसको उक्त क्रम से लिखा । अन्त में आदिम अङ्क ७ का वन ७ × ७ × ७ = ३४३ को रखकर सबों को स्थानान्तर से जोड़ने पर १२६८३ हुआ । उपरोक्त रीति से अङ्कों को स्थापित करने पर—निम्नलिखित रूप हुआ ॥ १२ ॥

२३
८९४
८४४३
१२६८३

इसी तरह १२५ का वन करने पर १२५३१२५ होता है ।

तीसरा प्रकार—१२५ का वन करने के लिए इसके दो टुकड़े १०० और २५ क्रिये । अब सूत्र के अनुसार १२५ को दोनों टुकड़ों से गुणा करने पर $१२५ \times १०० \times २५ = १२५०० \times २५ = ३१२५००$ । इसे ३ से गुणा किया तो $३१२५०० \times ३ = ९३७५००$ हुआ । इसमें दोनों टुकड़ों के वन योग $१०००००० + ९५६२५ = १०१५६२५$ को जोड़ने पर $९३७५०० + १०१५६२५ = १११३१२५$ यह वन हुआ ।

इसी तरह प्रत्येक राशि का वन किया जा सकता है ।

चौथा प्रकार—९ का वन करना है, तो ९ का वर्गमूल ३ का वन करने पर $३ \times ३ \times ३ = २७$ हुआ । इसका वर्ग करने से $२७ \times २७ = ७२९$, यहाँ ९ का वन है ।

वन परिशिष्ट

(१) किसी संख्या का दो से अधिक टुकड़ों द्वारा वन निकालना । यथा २२४ का वन करना है, तो इसे ३ टुकड़ों २००, १०, १४ में बाँटा । $२२४^३ = २२४ \times २२४ \times २२४ = (२०० + १० + १४)^३$ यहाँ (२०० + १०) = अन्वय, १४ = आदि । अब दूसरी रीति से $(२०० + १०)^३ + ३ \times १४ (२०० + १०)^२ + ३ \times २१० \times १४ + २७४४ = २२६१००० + १८५२२०० + १२३४८० + २७४४ = ११२३९४२४ = उत्तर ।$

अभ्यासार्थ प्रश्नाः—

वन बताओ ।

(१) १२७ (२) ३१२ (३) २२२ (४) ६२५ (५) ७२५ (६) १२१८

गुणितान्त्योपान्तिमाद्धवर्गवातशोधनेन शेषे उपान्तिमाद्धवने शोधिते यदि शेषा-
भावस्तदा तदेव वनमूलम्, अन्यथा शेषसत्त्वे पुनरस्य कृत्या त्रिच्येत्यादिविधिः
कर्तव्या एवेति सर्वमुपपन्नम् ।

अत्रोद्देशकः ।

पूर्वघनानां मूलार्थं न्यासः ७२८ । १६६८३ । १६५३१२५ ।

क्रमेण लब्धानि मूलानि ६ । २७ । १२५ ।

इति वनमूलम् ।

इति परिक्रमाष्टकं समाप्तम् ।

उदाहरण—७२९ का वनमूल पहले दिखाया गया है । यहाँ १९६८३ का
वनमूल निकालना है, अतः अन्तिम वनाद्ध ९ होने से १९ में २ का वन ८
घटाने पर ११ बचा, इस पर ६ उतारने से ११६ हुआ । इसमें त्रिगुणित
२ का वर्ग $३ \times ४ = १२$ से भाग देने पर ८ या ९ मी लब्धि हो सकती है,
किन्तु ऐसा करने पर आगे की क्रिया रुक जायगी अतः ७ ही लब्धि ली ।
अब ११६ में ८४ घटाने पर शेष ३२ रहा, इस पर ८ उतारने से ३२८
हुआ । इसमें लब्धि ७ के वर्ग ४९ को त्रिगुणित अन्त्य $३ \times २ = ६$ से गुणा
करने पर २९४ को घटाने से ३२८ - २९४ = ३४ हुआ । इस पर ३ उतारा
तो ३४३ हुआ । इसमें फल ७ का घन ३४३ घटाने से शेष नहीं रहा, अतः
१९६८३ का वनमूल २७ हुआ । इसी तरह १९५३१२५ का वनमूल
निकालने से १२५ होता है ।

वनमूल परिशिष्ट

(१) उत्पादक के द्वारा वनमूल निकालना ।

त्रिस घनात्मक संख्या का वनमूल निकालना हो, उसका पहले उत्पादक
निकाले । उत्पादक में प्रत्येक अङ्क ३ बार आते हैं, इसलिए उन अङ्कों में से
एक-एक को लेकर सब का वात करने पर वनमूल होंगे ।

यथा—१९६८३ का वनमूल निकालना है अतः—
 $१९६८३ = ३ \times ६५६९ = ३ \times ३ \times २१८७ = ३ \times ३ \times ३ \times ७२९ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times २४३ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ८१ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times २७ =$

अथवा दूसरी रीति से हर ४, ८ को ४ से अपवर्तन दिया तो १, २ हुए । अब १, २, से परस्पर हर और अंश को गुणा किया तो $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$ हुए । दोनों को जोड़ने पर $\frac{५}{६}$ हुआ । यह योगफल पहले के तुल्य ही आया ।

विशेष—(भिन्न की परिभाषा) जो कोई राशि इकाई के एक, वा अधिक समान भागों से बनी रहती है उसे भिन्न कहते हैं । साधारण भिन्न सम, विपम और संयुक्त भिन्न के भेद से तीन प्रकार के होते हैं । जिसमें अंश हर से छोटा हो उसे समभिन्न कहते हैं । समभिन्न के विपरीत विपमभिन्न होता है । संयुक्त भिन्न में पूर्णाङ्क और समभिन्न दोनों रहते हैं । जैसे— $२\frac{१}{२}$, $३\frac{२}{३}$, $९३\frac{५}{६}$ । भागजाति भिन्न उसे कहते हैं जिसमें हर और अंश दोनों पूर्णाङ्क हों । प्रभागजाति भिन्न वे हैं जिनमें हर वा अंश या दोनों पूर्ण संख्या न हों, जैसे— $\frac{३}{५}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$ । यदि कोई संख्या अपने किसी अंश से युक्त हो तो उसे भागानु-

बन्ध कहते हैं । यदि कोई संख्या अपने किसी भाग से हीन हो तो उसे भागापवाह कहते हैं ।

उपपत्ति:—अत्र कल्प्येते भिन्नराशी $\frac{अ}{क}$, $\frac{ग}{घ}$ अनयोर्योगान्तरकरणमिष्ट-

मतः सजातीयकरणार्थं कल्पितम्— $\frac{अ}{क} = च$, $\frac{ग}{घ} = प$, $\therefore अ = क च$, एवं ग

$= घ प$ । $\therefore अ घ = क च घ$ तथा $ग क = घ प क$ । $\therefore अ घ = ग क =$

$क च घ \pm घ प क = क घ (च \pm प)$ $\therefore च \pm प = \frac{अ घ \pm ग क}{क घ}$,

अत उपपन्नं पूर्वार्द्धम् । यदि $\frac{क}{म} = व$, तथा $\frac{घ}{म} = स$, तदा $क = म व घ =$

$म स$, तत आभ्यां क, घ मानाभ्यां पूर्वस्वरूपमुत्थापनेन $च \pm प =$

$\frac{अ म स \pm ग म व}{म व म स} = \frac{म (अ स \pm ग व)}{म^२ व स} = \frac{अ स \pm ग व}{म व स} = \frac{अ स}{म व स}$

$\pm \frac{ग व}{म व स}$ परन्तु $क = म व$ एवं $घ = म स$ $\therefore \frac{अ स}{क स} \pm \frac{ग व}{घ व}$ उपपन्नं-

सर्वम् ।

उपपत्तिः—अत्रालोपोक्त्या कल्पयते $\frac{अ}{क} = ल, \frac{ल \times ग}{प} = च, \frac{च \times व}{न} =$

म, $\frac{म \times ट}{स} = ल$ इत्यादि ।

$$\therefore ल = \frac{च \times व \times ट}{न \cdot स} = \frac{ल \cdot ग \times व \cdot ट}{न \cdot स \cdot प} = \frac{अ \cdot ग \cdot व \cdot ट}{क \cdot प \cdot न \cdot स}$$

अत उपपद्यं सर्वम् ।

अत्रोद्देशकः ।

द्रम्मार्धत्रिलवद्वयस्य सुमते पादत्रयं यद्भवेत्
तत्पञ्चांशकषोडशांशचरणः संप्रार्थितेनाधिने ।

दत्तो येन वराटकः कति कदर्वेणापितास्तेन मे

ब्रूहि त्वं यदि वेत्सि वत्स गणिते जातिं प्रभागाभिधाम् ॥ १ ॥

हे सुमते ! किसी कदर्व (कृपण) ने एक निबुद्ध को याचना करने पर १ द्रम्म के आधे के द्विगुणित तृतीय भाग का जो त्रिगुणित चतुर्यांश होता है, उसके पञ्चमांश के षोडशांश का चतुर्यांश दिया, तो हे वत्स ! यदि तुम प्रभागजाति गणित को जानते हो, तो बताओ कि कृपण ने कितनी कौड़ियाँ उस याचक को दीं ।

न्यासः । $\frac{१}{२} \frac{१}{२} \frac{१}{२} \frac{१}{२} \frac{१}{२} \frac{१}{२} \frac{१}{२} \frac{१}{२}$ ।

सवर्णिते जातम् $\frac{१}{२५६०}$ ।

पङ्क्तिरपवर्तिते जातम् $\frac{१}{५२८०}$ । एको दत्तो वराटकः ।

इति प्रभागजातिः ।

उदाहरण— $\frac{१}{२}, \frac{१}{२}, \frac{१}{२}, \frac{१}{२}, \frac{१}{२}, \frac{१}{२}, \frac{१}{२}, \frac{१}{२}$, इनका सूत्र के अनुसार सवर्गन करने से $\frac{१ \times १ \times १ \times १ \times १ \times १ \times १ \times १}{२ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २} = \frac{१}{२५६०} = \frac{१}{५२८०}$ द्रम्म । $\frac{१ \times १ \times १}{२ \times २ \times २} =$ पग, $\frac{१ \times १ \times १ \times १}{२ \times २ \times २ \times २} =$ काक्किणी, $\frac{१ \times १ \times १ \times १ \times १ \times १}{२ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २} = \frac{१}{५२८०} =$ वराटक १ = उत्तर १ कौड़ी ।

अथ भागानुबन्धभागापवाहयोः करणसूत्रं सार्धवृत्तम् ।

छेदन्नरूपेषु लवा धनर्णमेकस्य भागा अधिकोनकाथेत् ॥२॥

न्यासः २ १/२ । ३ १/२ । सर्वणिते जातम् १/२ । १ १/२ ।

उदाहरण—२ में १/२ जोड़ना है अतः सूत्र के अनुसार सर्वगन करने पर
 $२ + १/२ = २ + १/२ = २ १/२ = ५/२$ हुआ । ३ में १/२ घटाना है तो सर्वगन कर
 $३ घटाने से ३ - १/२ = ३ - १/२ = ५ १/२ = ११/२$ हुआ ।

अत्रोद्देशकः ।

अङ्घ्रिः स्वयंशयुक्तः स निजदलयुनः कीदृशः कीदृशीं द्वी
 श्रंशो स्वाश्रंशदीनां तदनु च रहिता स्वैच्छिभिः सप्तभागेः ।

अथ स्वाश्रंशदीनां नवभिरथ युतं सप्तमांशैः स्वकीयैः

कीदृक् स्याद् ब्रह्मि वेत्सि त्वमिह यदि सखेऽशानुवन्वापवाहो ॥ २ ॥

हे मित्र ! यदि तुम भागानुबन्ध और भागापवाह जानने हो तो उसके
 अनुसार एक का चतुर्थांश १/२ में अपने तृतीयांश १/३ को जोड़ कर फिर उसमें
 उसी का आधा १/२ जोड़ने से क्या होगा ? एवं दो की तिहाई २/३ में अपने
 अष्टमांश १/८ को घटाने से जो हो, उसमें अपने त्रिगुणित सप्तमांश ७/३
 को घटाने पर शेष बताओ । तीसरा प्रश्न यह है कि आधे १/२ में अपने अष्टमांश
 १/८ को घटाने से जो हो, उसमें अपने नवगुणित सप्तमांश ७/३ को जोड़ने
 पर जो हो, वह कहो ॥ २ ॥

न्यासः । १/२ १/२ १/२

१/२ १/२ १/२ सर्वणिते जातं क्रमेण १/२ ३/२ १/२ ।

१/२ १/२ १/२

इति ज्ञानि चतुष्टयम् ।

उदाहरण—१/२, १/२, १/२ इन सबों को जोड़ना है अतः पहले १/२ में १/२ को
 सूत्र के अनुसार जोड़ा तो १ १/२ = ३/२ हुआ । ३/२ में १/२ को जोड़ा तो २ = ४/२ यह
 उत्तर हुआ ।

दूसरे प्रश्न में क्वथ घटाव है, इसलिये ३/२ में १/२ को पहले घटाने के लिए
 सूत्र के अनुसार हर को हर से गुणा किया तो ३ × ८ = २४ हुआ । पक्षों
 भागापवाह है, अतः दूसरे के हर (८) में उतर वाले (१) अंश को घटाया
 तो २ हुआ, इससे दूसरे के अंश (३) को गुणा किया तो १४ हुआ । क्रम से

अथ भिन्नगुणने करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

अंशादितिर्छेदवधेन भक्ता लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ॥४॥

विभिन्ने गुणने—भिन्नगुणनक्रमणि, अंशादितिः, छेदवधेन भक्ता लब्धं गुणन-
फलं स्यादिति ॥ ३ ॥

भिन्न अर्द्ध के गुणन में अंश को अंश से गुणा कर उसमें हरों के वात से भाग देने पर गुणनफल होता है ॥ ३ ॥

उपपत्तिः—कल्प्यते गुण्यः = $\frac{अ}{क}$, गुणकः = $\frac{ग}{व}$

∴ गुणनफलम् = गुण्य × गुणक = $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{व} = \frac{अ-ग}{क-व}$ अत्र उपपन्नम् ॥३॥

अत्रोद्देशकः ।

सध्यंशरूपद्वितयेन निम्नं सप्तमांशद्वितयं भवेत् किम् ।

अथ त्रिभागेन हतं च विद्वि दशोऽसि भिन्ने गुणनाविधौ चेत् ॥१॥

हे मित्र ! यदि तुम भिन्नगुणन में समर्थ हो, तो तृतीयांश से युत दो (२ + $\frac{१}{३}$) से सप्तमांशसहित दो (२ + $\frac{१}{३}$) को एवं ($\frac{१}{३}$) को ($\frac{१}{३}$) से गुणा कर गुणनफल बताओ ।

न्यासः । २ $\frac{१}{३}$, २ $\frac{१}{३}$ । सवर्णिते जातम् $\frac{५}{३}$ $\frac{१५}{३}$ । गुणिते च जातम् $\frac{५}{३}$ ।

न्यासः । ३ $\frac{१}{३}$ । गुणिते जातम् $\frac{१}{३}$ ।

इति भिन्नगुणनम् ।

उदाहरण—२ + $\frac{१}{३}$, २ + $\frac{१}{३}$ इन दोनों का सवर्णन करने से $\frac{५}{३}$ $\frac{१५}{३}$ हुये ।

अब सूत्र के अनुसार दोनों को गुणा करने पर $\frac{५}{३} \times \frac{१५}{३} = \frac{१५५}{९}$ हुआ । यहाँ दोनों अंशों के घात १०५ में हरद्वय का घात २१ से भाग दिया तो गुणनफल $\frac{१५५}{९} = ५$ आया । अब $\frac{१}{३}$ को $\frac{१}{३}$ से गुणा किया तो गुणनफल $\frac{१}{३} \times \frac{१}{३} = \frac{१}{९}$ हुआ ।

इति भिन्नगुणनम् ।

अथ भिन्नभागहारे करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

छेदं लवं च परिवर्त्य हरस्य शेषः कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च ।

अथ भागहरणे हरस्य छेदं लवं च परिवर्त्य शेषः गुणनाविधिः कार्यः ॥

वर्ग या घन करें। यदि वर्गमूल या घनमूल लेना इष्ट हो, तो हर और अंश दोनों का अलग-अलग मूल निकालना चाहिये।

उपपत्ति:—कल्प्यते $\frac{अ}{क}$, अस्य वर्गः कर्तव्योऽस्ति तदा 'समद्विवातः

कृतिरुच्यते' इत्यनेन $(\frac{अ}{क})^2 = \frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = \frac{अ^2}{क^2}$ इति। घनकरणाय तु घन-

परिभाषया $(\frac{अ}{क})^3 = \frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = \frac{अ^3}{क^3}$ । एवं वर्गमूलादिक्रमप्युपपद्यते।

अत्रोद्देशकः।

सार्वत्रयाणां कथयाशु वर्गं वर्गात् ततो वर्गपट्टं च मित्र।

घनं च मूलं च घनात् ततोऽपि जानासि चेद्वर्गघनौ विभिन्नौ ॥ १ ॥

हे मित्र ! यदि तुम भिन्न संख्या के वर्ग और घन की रीति जानते हो, तो $३ + ३ = \frac{६}{१}$ का वर्ग और उस वर्ग का वर्गमूल एवं $\frac{६}{१}$ का घन और घन का घनमूल शीघ्र बताओ।

न्यासः ३३। छेदन्नरूपे कृते जातम् $\frac{६}{१}$ ।

अस्य वर्गः $\frac{३६}{१}$ । मूलम् $\frac{६}{१}$ । घनः $\frac{३६३}{१}$ । अस्य मूलम् $\frac{६}{१}$ ।

इति भिन्नपरिकर्माष्टकम्।

उदाहरण— $\frac{६}{१}$ का वर्ग करना है, अतः सूत्रके अनुसार $(\frac{६}{१})^2 = \frac{३६}{१}$ हुआ। $\frac{३६}{१}$ का वर्गमूल लिया, तो $\frac{६}{१}$ हुआ एवं $\frac{६}{१}$ का घन किया, तो $\frac{६}{१} \times \frac{६}{१} \times \frac{६}{१} = \frac{३६३}{१}$ हुआ। घनमूल लाने पर $\frac{६}{१}$ हुआ।

इति भिन्नपरिकर्माष्टकम्।

भिन्नपरिशिष्ट।

लघुतमसमापवर्त्य के द्वारा भिन्नाङ्कों की योगान्तरविधि।

भिन्नाङ्कों के हरों के लघुतम समापवर्त्य निकाल कर हर के स्थान में लिखें। बाद में अपने-अपने हर से उस लघुतम को भाग देकर अपनी-अपनी लब्धि से अपने-अपने अंश को गुणाकर अंश स्थान में लिखकर योग वा अन्तर करना चाहिए। जैसे $\frac{३}{५}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{३}{५}$, इनको जोड़ना है। यहाँ ३, ५, १०, १५, २० का लघुतम समापवर्त्य निकालने पर ६० होता है। ६० को हर की जगह में लिखा। अब ६० में अपने २ हरों से भाग देने पर क्रम से २०, १२,

विशेषः—यदि किसी पद में +, -, ×, ÷ और 'का' चिह्नों में से सभी या कुछ हों, तो सबसे पहले 'का' चिह्न की क्रिया होती है, उसके बाद क्रम से भाग, गुणा, योग और घटाव की क्रिया करनी चाहिये।

जैसे—(१) $1\frac{2}{3} \times 2\frac{3}{4} \div 5\frac{1}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{4} \div \frac{11}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{2}{11}$
 $= \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{2}{11} = \frac{4 \times 9 \times 2}{3 \times 2 \times 11} = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$ उत्तर।

(२) $1\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \div \frac{6}{7}$ का $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$
 $= 1\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \div \frac{6}{7} - 1\frac{1}{2}$
 $= 1\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} - 1\frac{1}{2}$
 $= \frac{28}{15} - 1\frac{1}{2} = \frac{28}{15} - \frac{15}{10} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$ उत्तर।

(३) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$ का $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
 $= \frac{9}{10} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9 \times 2 + 3 \times 5 + 5 \times 2}{20} = \frac{30 + 15 + 10}{20} = \frac{55}{20} = 2\frac{11}{40}$ उत्तर।

(४) $2 + 1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$ का $1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 2 + 1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 2 + 1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 2 + \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 2 + \frac{3 \times 3 \times 6}{2 \times 4 \times 5} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 2 + \frac{27}{10} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{20 \times 10 + 27 \times 10 - 15 \times 10 + 5 \times 10}{10} = \frac{200 + 270 - 150 + 50}{10}$
 $= \frac{370}{10}$ उत्तर।

(५) $2\frac{1}{2} \div \frac{3 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 2\frac{1}{2} \div \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{6}} + \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 2\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2} \times \frac{6}{1} + \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

यदि कोष्ठ के पहले घन (+) चिह्न हो, तो कोष्ठ तोड़ने पर उसके भीतर की संख्याओं के चिह्न ज्यों के त्यों रह जाते हैं।

$$\text{यथा—} 2 \div (11 - 9 \div 3) = 2 + 11 - 9 \div 3।$$

यदि कोष्ठ के पहले ऋण (-) चिह्न हो, तो कोष्ठ को तोड़ने पर उसके भीतर के घन और ऋण चिह्न क्रम से ऋण और घन में बदल जाते हैं।

$$\text{यथा—} 25 - (2 - 3 + 10) = 25 - 2 + 3 - 10।$$

उदाहरण—

$$(1) 2 + (2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}) = 2 + (\frac{5}{2} - \frac{5}{2}) = 2 + (\frac{5-5}{2}) \\ = 2 + (\frac{0}{2}) = 2 + \frac{0}{2} = \frac{4}{2} = 2\frac{0}{2} \text{ उत्तर।}$$

$$(2) 3 \div [2 + 2 \div \{2 + 4 \div (2 - \frac{1}{2})\}] \\ = 3 \div [2 + 2 \div \{2 + 4 \div \frac{3}{2}\}] \\ = 3 \div [2 + 2 \div \{2 + \frac{4 \times 2}{2}\}] \\ 3 \div [2 + 2 \div \{2 + 4\}] = 3 \div [2 + 2 \div 6] = 3 \div [2 + \frac{2}{3}] \\ = 3 \div [\frac{6}{3} + \frac{2}{3}] = 3 \div \frac{8}{3} = \frac{3 \times 3}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8} \text{ उत्तर।}$$

$$(3) 5 - [\frac{3}{2} + \{2\frac{1}{2} - (1\frac{1}{2} - \frac{1}{2})\}] \\ = 5 - [\frac{3}{2} + \{2\frac{1}{2} - (\frac{3}{2} - \frac{1}{2})\}] = 5 - [\frac{3}{2} + \{2\frac{1}{2} - (\frac{2}{2})\}] \\ = 5 - [\frac{3}{2} + \{2\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\}] = 5 - [\frac{3}{2} + \{\frac{5}{2} - \frac{2}{2}\}] \\ = 5 - [\frac{3}{2} + \{\frac{3}{2}\}] = 5 - [\frac{3+3}{2}] = 5 - \frac{6}{2} = \frac{10-6}{2} \\ = \frac{4}{2} = 2\frac{0}{2} \text{ उत्तर।}$$

$$(4) 3 + [2 - \frac{1}{2} \{5 - (2 \div 2 \text{ का } \frac{1}{2})\}] \\ = 3 + [2 - \frac{1}{2} \{5 - (2 \div \frac{1}{2})\}] \\ = 3 + [2 - \frac{1}{2} \{5 - (\frac{2 \times 2}{1})\}] \\ = 3 \div [2 - \frac{1}{2} \{5 - 4\}] = 3 \div [2 - \frac{1}{2} \{1\}] \\ = 3 \div [2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}] \\ = 3 \div [2 - \frac{1}{2}] = 3 \div [\frac{4}{2} - \frac{1}{2}] = 3 \div \frac{3}{2} = \frac{3 \times 2}{3} \\ = \frac{6}{3} = 2\frac{0}{3} \text{ उत्तर।}$$

$$(5) \frac{2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} \text{ का } 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}) \text{ का } (1\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}$$

$$\frac{4\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} (4\frac{1}{2} + 6\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2})}{(18) \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}} \right\} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} (3 + 3 - \frac{1}{2})}$$

$$(14) \frac{3}{4} \div \frac{1 - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} + (3 + 3) \div (3 + 3)$$

इति भिन्नपरिशिष्टम् ।

अथ दशमलवविधिः ।

१—जिस भिन्न के हर की जगह केवल १० का कोई घात हो, उसे दशमलव भिन्न कहते हैं ।

यथा— $\frac{1}{10}$, $\frac{12}{100}$, $\frac{343}{1000}$, $\frac{5213}{10000}$, $\frac{21345}{100000}$ आदि दशमलव भिन्न हैं । इनको हम दूसरी रीति से भी लिख सकते हैं । यथा—दशमलव भिन्न में हर की जगह १ के बाद जितने शून्य हों अंश में इकाई आदि के क्रम से उतनी जगह गिनकर दशमलव के चिह्न (.) लगा दें ।

यथा— $\frac{1}{10}$, $\frac{12}{100}$, $\frac{343}{1000}$ आदि में १ के ऊपर क्रम से एक, दो, तीन आदि शून्य हैं, अतः अंश में एक, दो, तीन आदि जगहों के बाद दशमलव चिह्न (.) रखने पर $.1$, $.12$, $.343$ आदि हुए । यदि हर की जगह में एक के ऊपर जितने शून्य हों उनसे, अंश में अङ्क कम हों, तो इकाई की जगह से गिनने के बाद जितने अङ्क कम हों उतने शून्य पीछे में देकर उसके बाद दशमलव का चिह्न (.) रखना चाहिये । यथा— $\frac{3}{1000}$ यहाँ हर में एक पर तीन शून्य हैं, परञ्च अंश में एक ही अङ्क है, अतः ३ के पीछे दो शून्य रखकर तब दशमलव का चिह्न रखा ।

$$\therefore \frac{3}{1000} = .003$$

$$\begin{aligned} 496.832 &= 400 + 9 + 6 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000} \\ &= 496 + \left(\frac{4}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000} \right) = 496 + \left(\frac{400 + 80 + 3}{1000} \right) \\ &= 496 + \frac{483}{1000} \end{aligned}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि भाज्य में स्थित अङ्कों की दायी ओर इच्छानुसार शून्य रखने पर भी उसका स्वरूप नष्ट नहीं होता । पूर्ण-राशि

लीलावत्यां

वैश्व—

$$\frac{2}{5} = .4$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 20} \\ \underline{20} \\ \times \times \end{array}$$

$$\frac{3}{4} = .75$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 30} \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \end{array}$$

$$\frac{23}{10} = 2.30$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 230} \\ \underline{20} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \\ \times \times \end{array}$$

$\frac{1523}{10} = 152.3$ इत्यादि ।

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न

निम्नलिखित भिन्नो को दशमलव में बदलो—

- (1) $\frac{1}{4}$, (2) $\frac{3}{10}$, (3) $2\frac{1}{2}$, (4) $20\frac{3}{10}$, (5) $2\frac{3}{4}$,
 (6) $2\frac{6}{10}$, (7) $4\frac{6}{10}$, (8) $1\frac{3}{10}$, (9) $4\frac{4}{10}$, (10) $\frac{3}{10}$ ।

दशमलव का योग ।

२—दशमलव को एक दमरे के नीचे इस तरह लिखना चाहिये कि सब दशमलव बिन्दु एक ही खड़ी पंक्ति में हों ।

यथा—गुण्य २२५४, गुणक २८६ ।

$$\begin{array}{r}
 २२५४ \\
 २८६ \\
 \hline
 १९५२४ \\
 २६०३२ \\
 ६५०८ \\
 \hline
 ९३०६४४
 \end{array}$$

∴ गुणनफल = ०९३०६४४ उत्तर ।

दशमलव का भाग ।

भाजक में जितने अङ्क दशमलव में हों, भाज्य के दशम लव चिह्न को उतने अङ्क भागे (दायीं ओर) त्रिसका (हटा) कर रक्ते । ऐसा करने से भाजक पूर्णाङ्क हो जाता है । इसके बाद भाज्य की पूर्णाङ्क संख्या में भाजक से भाग देकर जो लब्धि हो, उसके भागे दशमलव का चिह्न रखकर पूर्णाङ्क शेष के ऊपर दशमलव के अङ्कों को बारी-बारी से उतार कर उसमें भाजक से भाग देकर जो लब्धि हो उसे भागफल की जगह दशम बिन्दु के बाद लिखना चाहिये ।

(१) यथा— २५३२ को २५ से भाग देना है । यहाँ भाजक में दो अङ्क दशमलव में हैं, अतः भाज्य के दशमलव चिह्न को दो अङ्क भागे हटा कर रखने पर ४५-३२ हुआ । अब भाजक २५ हो गया ।

$$\begin{array}{r}
 २५ \overline{) ४५.३२} \quad (१.८१२८ \\
 \underline{२५} \\
 २०३ \\
 \underline{२००} \\
 ३२ \\
 \underline{२५} \\
 ७० \\
 \underline{५०} \\
 २०० \\
 \underline{२००} \\
 \hline
 \times
 \end{array}$$

(३) भाज्य ८७९६२ भाजक १२५ यहाँ भाजक के दशमलव में तीन अङ्क हैं, और भाज्य में एक भी अङ्क दशमलव में नहीं है, अतः भाज्य के ऊपर तीन शून्य रखकर भाजक से भाग दिया।

$$\begin{array}{r}
 \text{यथा—} 125 \overline{) 87962000} \quad (703696 \text{ उत्तर} \\
 \underline{875} \\
 46 \\
 \underline{450} \\
 1200 \\
 \underline{1125} \\
 750 \\
 \underline{750} \\
 \times \times
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{युक्ति } \frac{87962}{125} &= \frac{87962}{\frac{5 \times 5 \times 5}}{1000} = \frac{87962 \times 1000}{125} \\
 &= \frac{87962000}{125} = 703696 \text{ उत्तर}
 \end{aligned}$$

(४) भाजक में जितने अङ्क दशमलव में हों, उनसे कम अङ्क भाज्य के दशमलव में हों, तो भाजक के दशमलव की संख्या भाज्य के दशमलव की संख्या से जितनी अधिक हो उतने शून्य भाज्य के ऊपर रखकर भाजक से भाग देना चाहिये।

यथा—भाज्य ४५६७८२ भाजक १२०५ यहाँ भाज्य की दशमलव संख्या से भाजक की दशमलव संख्या २ अधिक है, अतः भाज्य के ऊपर दो शून्य रखने पर ४५६७८२०० हुआ। इसमें ४२०५ से भाग दिया तो १०८६२८२९९६ आदि हुए।

(५) दशमलव के भाज्य और भाजक को साधारण भिन्न में लाकर भाग देना चाहिये।

यथा— ३२ को ००४ से भाग देना है, तो यहाँ $32 = \frac{320}{10}$, और $004 = \frac{4}{1000}$ अथ $\frac{320}{10} \div \frac{4}{1000} = \frac{320}{10} \times \frac{1000}{4} = \frac{32000}{4} = 8000$ उत्तर

संख्या में ४ अङ्क दशम लव में हैं, अतः वर्ग मूल में दो अङ्क दायीं से बायीं ओर गिन कर दशम लव में रखने पर २-९७ हुआ ।

अभ्यासार्थ प्रश्नः—

गुणा करो

- (१) १२.२३५ को २.३ से । (४) ५.२००१३ को ५२००१ से ।
 (२) ६.७३२ को १.७९ से । (५) ३.३३५७ को ३३४८२ से ।
 (३) ५७३ को ४६ से ।

भाग दो

- (६) ४४८७६ को २५ से ।
 (७) ००००५ को ०००००००१२५ से ।
 (८) ४३.१३७६ को ८१७० से ।

पाँच दशमलव अंकों तक भागफल बताओ ।

- (९) २३५.४५६ को ३२१४ से । (१३) २१.४३२ को ९० से ।
 (१०) ६.३२ को ३४३ से । (१४) ८.७६५ को १३ से ।
 (११) ३५६.४ को २७२ से । (१५) ४२५.७३ को २१ से ।
 (१२) ४.१२३ को २ से ।

वर्गमूल बताओ

- (१६) ४.८४, १०.२४, ६.२५, ५६.२५, ८२.८१ ।

पाँच दशमलव अङ्क तक वर्गमूल निकालो ।

- (१७) ९६१.८७६५ (१९) ६५६२.८३२६५
 (१८) ३६.२४५३१८ (२०) ०३२१८७६

सरल करो

- (२१) $\frac{५.२५.०००२५}{००१७५५२.६}$ (२४) $\frac{१३१५.८५}{००९९५.०४२}$
 (२२) $\frac{०६५५९.५}{१.५२}$ (२५) $\frac{२०४५.००१६३}{०००१७५.२०८}$
 (२३) $\frac{५२५५.३६२}{००००२६२५५.००१०२६}$

आयत दशमलव ।

- (९) कुछ सामान्य भिन्न जब दशमलव के रूप में लिखे जाते हैं, तो

(१) यथा— $\cdot\dot{०}$ को हमें भिन्न के रूप में लिखना है। तो यहाँ उक्त रीति के अनुसार $\frac{७-०}{१-०} = \frac{७}{१}$ उत्तर।

युक्ति:— $\cdot\dot{०} = ७७७७७\dots\dots$

और $\cdot\dot{०} \times १० = ७७७७७७\dots\dots$

$\therefore \cdot\dot{०} \times १० - \cdot\dot{०} = ७७७७७७\dots\dots - ७७७७७$

या $\cdot\dot{०} (१० - १) = ७$

या $\cdot\dot{०} \times ९ = ७$

या $\cdot\dot{०} = \frac{७}{९}$ उत्तर।

(२) $\cdot\dot{३५}\ddot{४}$ इसको भिन्न के रूप में लाना है, तो उक्त रीति के अनुसार

$$\frac{३५\ddot{४}-३}{१-०} = \frac{३५१}{१-०} = \frac{३५१}{१} = \frac{३५१}{१} \text{ उत्तर।}$$

युक्ति:— $\cdot\dot{३५}\ddot{४} = ३५४५४५४\dots\dots$

$\therefore \cdot\dot{३५}\ddot{४} \times १००० = ३५४५४५४\dots\dots \times १०००$

और $\cdot\dot{३५}\ddot{४} \times १० = ३५४५४५४\dots\dots \times १०$

$\therefore \cdot\dot{३५}\ddot{४} (१००० - १०) = ३५४५४५४५४\dots\dots - ३५४५४$

या $\cdot\dot{३५}\ddot{४} \times ९९० = ३५४ - ३ = ३५१$

या $\cdot\dot{३५}\ddot{४} = \frac{३५१}{९९०} = \frac{३९}{११०}$ उत्तर।

(३) $२६८\cdot३५२१\dot{५}\ddot{४}\ddot{७}\ddot{९}\ddot{३}\ddot{२}$ इसको भिन्न में लाना है, तो उक्त रीति के अनुसार, अभीष्ट भिन्न = $\frac{२६८३५२१५४७९३२-२६८३५२१}{१-०}$

$$= \frac{२६८३५२१५४७९३२-२६८३५२१}{१-०} \text{ उत्तर।}$$

युक्ति:— $२६८\cdot३५२१\dot{५}\ddot{४}\ddot{७}\ddot{९}\ddot{३}\ddot{२} = २६८३५२१५४७९३२५४७९३२\dots$

$\therefore २६८\cdot३५२१\dot{५}\ddot{४}\ddot{७}\ddot{९}\ddot{३}\ddot{२} \times १०००००००००००$

$$= २६८३५२१५४७९३२५४७९३२५४७९३२\dots\dots$$

और $२६८\cdot३५२१\dot{५}\ddot{४}\ddot{७}\ddot{९}\ddot{३}\ddot{२} \times १०००० =$

$$२६८३५२१५४७९३२५४७९३२\dots\dots$$

$\therefore २६८\cdot३५२१\dot{५}\ddot{४}\ddot{७}\ddot{९}\ddot{३}\ddot{२} \times (१०००००००००० - १००००)$

$$= २६८३५२१५४७९३२ - २६८३५२१$$

या $२६८\cdot३५२१\dot{५}\ddot{४}\ddot{७}\ddot{९}\ddot{३}\ddot{२} \times ९९९९९९००००$

$$= २६८३५१८८६४४११$$

$\therefore २६८\cdot३५२१\dot{५}\ddot{४}\ddot{७}\ddot{९}\ddot{३}\ddot{२} = \frac{२६८३५१८८६४४११}{९९९९९९००००}$ उत्तर

(४) ३.४६७९ में .००३२४ को घटाओ ।

$$३.४६७९ = ३.४६७९४६७९४६७९४६$$

$$\begin{array}{r} .००३२४ = \\ \underline{३.४६४७०३५५१४३६२२} \end{array} \text{ उत्तर ।}$$

(५) ४.५४७ में .२३८६ को घटाओ ।

यहाँ सहदा करने से—

$$४.५४७ = ४.५४७७७$$

$$.२३८६ = \underline{.२३८६३}$$

$$\text{अन्तर } ४.३०९१४$$

यहाँ आवर्त की प्रथम खड़ी पङ्क्ति में हाथ का १ अन्तर के अन्तिम अङ्क ४ में घटाने से ।

$$४.३०९१४$$

$$\begin{array}{r} १ \\ \underline{४.३०९१३} \end{array} \text{ उत्तर हुआ ।}$$

आवर्त दशमलव का गुणा और भाग

(१३) दशमलवों को सामान्य भिन्न के रूप में लाकर सामान्य भिन्न के अनुसार गुणा और भाग की क्रिया करके उसे फिर दशमलव के रूप में कर लेना चाहिये । यदि भाज्य और भाजक दोनों आवर्त दशमलव हों, तो पहले उन्हें सहदा करके तब सामान्य भिन्न के रूप में लाकर भाग देना चाहिये ।

(१) यथा—०.७ को ६.१ से गुणा करना है, तो उन्हें साधारण भिन्न में लाने से ।

$$.७ = \frac{७}{१०} \text{ गुण्य,}$$

$$\text{और } ६.१ = \frac{६१}{१०} = \frac{५५}{१०} \text{ गुणक}$$

$$\therefore \text{ गुणनफल } = \frac{७}{१०} \times \frac{५५}{१०} = \frac{७ \times ५५}{१० \times १०} = \frac{३८५}{१००}$$

$$= .३८५ \text{ उत्तर}$$

(२) भाज्य ३.५६ भाजक १.७४

$$\text{यहाँ } ३.५६ = \frac{३५६}{१००} = \frac{३५६३}{१०००}$$

$$= १.७४ = \frac{१७४}{१००} = \frac{१७४३}{१०००}$$

(२)

लीलावत्यां

मिश्र योग		
रु०	भा०	पा०
३	१३	५
८	७	२
१३	१०	७
२५ रु०	१५ भा०	२ पा०

इनको जोड़ना है ।

यहाँ पाइयों को जोड़ने पर १४ पा० हुआ, चूँकि १२ पाई का १ आना होता है, अतः १४ पा० का १ आना २ पा० हुआ । २ पाई को पाई की जगह में लिखा, और १ आना को आने की जगह में रख कर सबों को जोड़ने से ३१ आने हुये । इसमें १६ से भाग देने पर लब्धि १ रु० और शेष १५ आने हुये । १५ आने को आने की जगह में लिखा, और लब्धि १ रु० को रुपये की जगह में जोड़ने से २५ रु० हुए ।

अतः सबों का योग २५ रु० १५ भा० २ पा० उत्तर ।

(३) मिश्र घटाव

मिश्र घटाव में भी योग की ही तरह सजातीय इकाइयों को सजातीय इकाई के नीचे लिखकर साधारण घटाव की तरह घटाना चाहिये ।

यथा— १५ रु० ११ भा० ८ पा० में १३ रु० १४ भा० १० पा० को घटाना है, तो उक्तरीति से न्यास करने पर—

रु०	भा०	पा०	} हुआ
१५	११	८	
१३	१४	१०	
१ रु०	१२ भा०	१० पा०	

हुआ

उत्तर ।

यहाँ ८ पा० में १० पा० नहीं घटता, अतः १ आना (१२ पा०) पीछे से लेने पर (१२ + ८) २० पा० में १० पा० घटाया, तो शेष १० पा० रहा, इसको पा० की जगह में उत्तर में लिखा । आने की जगह १० भा० रहा, जिसमें १४ भा० नहीं घटता है, अतः पीछे से १ रु० (याने) १६ आने लिया तो (१६ + १०) २६ आने हुये, इसमें १४ आने घटाकर १२ आने,

हुये । शेष १ आ० को १२ से गुणा कर गुणन छट १२ में २ पा० जोड़ने पर १३ पा० हुये । इसमें भाजक १२ से भाग देने पर १ पा० लब्धि हुआ ।

इस तरह लिखने पर १० स० ५ आ० १ पा० उत्तर हुआ ।

(६) भाग करने के बाद यदि मध्यमें छोटी इकाई वाली संख्या का कुछ शेष रह जाय, और वह शेष यदि भाजक के आधे से छोटा हो, तो उसे छोड़ देना चाहिये । यदि शेष भाजक के आधे से अधिक हो, तो लब्धि में मध्यमें छोटी इकाई वाली संख्या में १ जोड़ देने पर सुवास्तव लब्धि होती है । यथा—

३३ पी० ७ शि० ११ पै० में ७ से भाग देना है, तो उच्छरीति से भाग देने पर लब्धि ५ पी० १ शि० १ पै० और शेष ४ पै० रहा । यहाँ शेष ४, भाजक ७ के आधे से अधिक है, अतः लब्धि में पैंग की जगह १ जोड़ने से ५ पी० १ शि० २ पै० वास्तव लब्धि हुई । इति ।

अभ्यासार्थ प्रश्न—

- (१) १५ निष्क, १३ द्रम, ११ पण, ३ काक्षिणी, ५ वराटक में १२१ निष्क, ८ द्रम, ९ पण, २ काक्षिणी, ११ वराटक को जोड़ो ।
- (२) १५२५ मील ११२३ गज ३ फीट ११ इंच में १२१ मील ८२२ ग० २ फी० ५ इंच को जोड़ो ।
- (३) ३१३ टन १९ हण्डर ३ फाटर २० पीण्ड में ३४२ टन ५ हण्डर २ फाटर १३ पीण्ड को जोड़ो ।
- (४) ४१ म० ३८ से० १२ छ० में ८५१ म० २९ से० १५ छ० को जोड़ो ।

इनका अन्तर बताओ

(५)	बीघा	कट्टा	धूर	कनवाँ	कनदं
	८५१	५	६	१३	११
	५३	८	९	१५	१२
(६)	वसकौंग	अंश	मिनट	सेकण्ड	
	८१	८३	५२	२१	
	७३	८५	५०	२३	

मूल्य प्रत्येक मंड के मूल्य से ५० गुना है। यदि ३ मंड का मूल्य १२ रु० १० आ० है, तो उस मनुष्य को कितना मूल्य देना पड़ा।

- (२१) किसी आदमी ने कुछ चाय खरीदी जिसमें ७३ सेर नष्ट हो गईं बाकी को उसने ४ शि० ११ पं० प्रति सेर की दर से ४१ पौ० ८ शि० में बँच दिया, तो उसने कुल कितनी चाय खरीदी थी।

व्यवहार गणित ।

- (१) जिस गणित का व्यवहार में बहुधा प्रयोजन होता है, उसे व्यवहार गणित कहते हैं।

व्यवहार गणित दो प्रकार के होते हैं।

- (क) जब किसी दी हुई दर से किसी अमिश्र राशि का मूल्य निकालना होता है, तो उसे सरल व्यवहार गणित कहते हैं।
- (ख) यदि दी हुई दर और वह संख्या (राशि) जिसका मूल्य निकालना है, दोनों मिश्र राशि हों, तो उसे मिश्र व्यवहार गणित कहते हैं।
- (२) व्यवहार गणित का आधार किसी संख्या का अंश भाजक या समानांश है। अंश भाजक का अर्थ नीचे के उदाहरण में स्पष्ट हो जायगा।

१ आना	=	१ रु० का $\frac{1}{16}$
२ आने	=	१ रु० का $\frac{1}{8}$
४ आने	=	१ रु० का $\frac{1}{4}$
८ आने	=	१ रु० का $\frac{1}{2}$

यहाँ सभी मिश्रों के अंश १ हैं, अतः १ आ०, २ आ०, ४ आ० और ८ आ० प्रत्येक १ रु० का अंश भाजक या समानांश है।

या,	५० नये पैसे	=	१ रु० का $\frac{1}{2}$
	२५ " "	=	१ रु० का $\frac{1}{4}$
	२० " "	=	१ रु० का $\frac{1}{5}$

(३) १२ मन १७ सेर ८ छटॉक, का दाम प्रति मन ३ रु० ७ आ० ४ पा० की दर से बताओ ।

	रु०	आ०	पा०	
	३	७	४	१ मन का दाम
			३	
	१०	६	०	३ मन का दाम
			४	
	४१	८	०	१२ मन का दाम
१० सेर = १ म० का $\frac{१}{३}$	०	१३	१०	१० सेर " "
५ सेर = १० से० का $\frac{१}{३}$	०	६	११	५ सेर " "
२ सेर ८ छ० = ५ सेर का $\frac{१}{३}$	०	३	५३	२ से० ८ छ० का दाम

४२ रु० १५ आ० २ $\frac{१}{३}$ पा०, १२ मन १७ सेर ८ छटॉक का दाम

(४) २१ टन १० हण्डर ३ क्वार्टर १४ पौ० का दाम, प्रति टन २१ पौ० ८ शि० ६ पें० की दर से निकालो ।

	पौ०	शि०	पें०	
	२१	८	६	१ टन का दाम
			७	
	१४९	१९	६	७ टन " "
			३	
	४४९	१८	६	२१ टन " "
१० हण्डर = १ टन का $\frac{१}{३}$	१०	१४	३	१० हण्डर " "
२ क्वार्टर = १० ह० का $\frac{१}{३}$	००	१०	८ $\frac{१}{३}$	२ क्वार्टर " "
१ क्वार्टर = २ क्वा० का $\frac{१}{३}$	००	५	४ $\frac{१}{३}$	१ क्वार्टर " "
१४ पौ० = १ क्वा० का $\frac{१}{३}$	००	२	८ $\frac{१}{३}$	१४ पौ० " "

४६१ पौ० ११ शि० ५ $\frac{११}{३}$ पें० २१ टन १० ह० ३ क्वार्टर १४ पौ० का दाम

अथ दृष्ट्यापयदृष्ट्याग्निः शुभो द्वितीयै रहितो युतो वा ।

दृष्ट्याग्निं दृष्ट्याग्निं मन्त्रं गग्निनेव् प्रोक्तमितीष्टम् ॥१॥

दृष्ट्याग्निः दृष्ट्याग्निपयवन् दुग्नाः, इवः, अंशैः रहितः वा युतः अर्ध-
अग्निं दृष्ट्याग्निं दृष्टं अर्धं नदा राशिः मन्त्रं, इति दृष्ट्यन्वितम् ।

यहाँ क्विपय दृष्ट अर्ध पर से ही राशि का ज्ञान होता है, अतः इस
नाम दृष्ट्यर्ध है । दृष्टमें कोई दृष्ट अर्ध कल्पना कर उसमें प्रश्न के अनुसार अंश
किया कर जो अर्ध निष्पन्न हो उससे दृष्ट गुणित दृष्ट में भाग देने से ज्ञान
होगी है । जैसे किसी ने पूछा कि वह राशि बताओ जिसे ३ से गुणाकर ११
भाग देने पर जो लब्धि हो उसमें उसीका तीसरा भाग घटाते हैं, वही
२ रहता है । शेष को दृष्ट राशि समझें । राशि ज्ञानार्थ दृष्ट अर्ध । अथ
अथ प्रश्न के अनुसार १ को ३ से गुणा किया तो $1 \times 3 = 3$ हुआ । इस
३ का भाग देकर लब्धि $\frac{3}{3}$ हुआ । $\frac{3}{3}$ में इसी का तीसरा भाग बटाए
 $(\frac{3}{3} - \frac{3}{3} = \frac{3}{3} - \frac{3}{3} = \frac{3}{3} - \frac{3}{3} = \frac{3}{3} = \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ हुआ । इससे दृष्ट गुणित $\frac{1}{3}$
 $1 \times 2 = 2$ में भाग दिया तो $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} = 2$ आया, यही प्रश्न का उत्तर

उपपत्तिः—अथ वास्तव राशिः = रा, वास्तव दृश्य = ३ क्विपयः

अन्त्यादाहापोरुया दृश्यम् = ६, तदा $\frac{६}{३} = \frac{२}{१}$ आलापत्य स्थिरः २ ।

अथेष्टकर्मसु करणसूत्रं वृत्तम् ।

उद्देशकलापवदिष्टराशिः क्षुण्णो हृतोऽंशै रहितो युतो वा ।

इष्टाहतं दृष्टमनेन भक्तं राशिर्भवेत् प्रोक्तमितीष्टकर्म ॥१॥

इष्टराशिः उद्देशकालापवत् क्षुण्णः, हतः, अंशैः रहितः वा युतः कार्यः अनेन इष्टाहतं दृष्टं भक्तं तदा राशिः भवेत्, इति इष्टकर्मप्रोक्तम् ।

यहाँ कल्पित इष्ट अङ्क पर से ही राशि का ज्ञान होता है, अतः इसका नाम इष्टकर्म है । इसमें कोई इष्ट अङ्क कल्पना कर उसमें प्रश्न के अनुसार सारी क्रिया कर जो अङ्क निष्पन्न हो उससे इष्ट गुणित दृष्ट में भाग देने से राशि होती है । जैसे किसी ने पूछा कि वह राशि बताओ जिसे ३ से गुणाकर ४ से भाग देने पर जो लब्धि हो उसमें उसीका तीसरा भाग घटाते हैं, तो शेष २ रहता है । शेष को दृष्ट राशि समझें । राशि ज्ञानार्थ इष्ट अङ्क १ माना । अब प्रश्न के अनुसार १ को ३ से गुणा किया तो $1 \times 3 = 3$ हुआ । इसमें ४ का भाग देकर लब्धि $\frac{3}{4}$ हुआ । $\frac{3}{4}$ में इसी का तीसरा भाग घटाया तो $(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 2$ हुआ । इससे इष्ट गुणित दृष्ट = $1 \times 2 = 2$ में भाग दिया तो $\frac{2}{4} \times \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = 2$ आया, यही प्रश्न की राशि है ।

उपपत्तिः—अत्र वास्तव राशिः = रा, वास्तव दरय = इ कल्पितमिष्टम् = इ,

अस्मादालापस्य दरयम् = इ', तदा $\frac{इ}{इ'} = \frac{रा}{इ}$ आलापस्य स्थिरत्वात् ।

$$\therefore रा \times इ' = इ \times इ \quad \therefore रा = \frac{इ \times इ}{इ'}$$

अत उपपन्नम् ।

अप्रोदेशकः ।

पद्मत्रः स्वत्रिभागोनो द्वाभक्तः ममन्वितः ।

राशिद्वयंशार्धपादैः स्यात् को राशिर्गुणमत्रविः ॥ १ ॥

यह द्वाभक्त राशि है, जिसे ५ से गुणाकर उसका १/५ घटाकर १० से भाग देकर लब्धि में राशि का १/५ और १/५ जोड़ने पर ३० दीना है ।

अथेष्टकर्मसु करणसूत्रं वृत्तम् ।

उद्देशकालापवदिष्टराशिः क्षुण्णो हृतोऽग्नौ रहितो युतो वा ।

इष्टाहतं दृष्टमनेन भक्तं राशिर्भवेत् प्रोक्तमितीष्टकर्म ॥१॥

इष्टराशिः उद्देशकालापवत् पुण्यः, हृतः, अंशैः रहितः वा युतः कार्यः, अनेन इष्टाहतं दृष्टं भक्तं तदा राशिः भवेत्, इति इष्टकर्मप्रोक्तम् ।

यहाँ कल्पित इष्ट अष्ट पर से ही राशि का ज्ञान होता है, अतः इसका मान इष्टकर्म है । इसमें कोई इष्ट अष्ट करना कर उसमें प्रश्न के अनुसार सारि क्रिया कर जो अष्ट निष्पन्न हो उससे इष्ट गुणित दृष्ट में भाग देने से राशि होती है । जैसे किसी ने पूछा कि वह राशि बताओ जिससे ३ से गुणाकर ४ से भाग देने पर जो लब्धि हो उसमें उसीका तीसरा भाग घटावे हैं, तो गेय २ रहता है । गेय को दृष्ट राशि समझें । राशि ज्ञानार्थ इष्ट अष्ट १ माना । अब प्रश्न के अनुसार १ को ३ से गुणा किया तो $1 \times 3 = 3$ हुआ । इसमें ४ का भाग देकर लब्धि $\frac{3}{4}$ हुआ । $\frac{3}{4}$ में इसी का तीसरा भाग घटाया तो $(\frac{3}{4} - \frac{3}{12}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ हुआ । इससे इष्ट गुणित दृष्ट = $1 \times 2 = 2$ में भाग दिया तो $\frac{2}{4} \times \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ आया, यही प्रश्न की राशि है ।

उपपत्तिः—अत्र वास्तव राशिः = रा, वास्तव दरय = इ कल्पितनिष्टम् = इ,

अस्मादालायोक्या दरयम् = इ', तदा $\frac{इ}{इ'} = \frac{रा}{इ}$ आलापस्य स्थिरत्वात् ।

$$\therefore रा \times इ' = इ \times इ \quad \therefore रा = \frac{इ \times इ}{इ'}$$

अत उपपन्नम् ।

अत्रोद्देशकः ।

पञ्चमः स्वत्रिभागोनो द्वाभक्तः समन्वितः ।

राशित्वंशरार्थपादैः स्यात् को राशिर्धूनत्प्रतिः ॥ १ ॥

वह कौन सी राशि है, जिससे ५ से गुणाकर उसका $\frac{1}{5}$ घटाकर १० से भाग देकर लब्धि में राशि का $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{5}$ जोड़ने पर ६० होता है ।

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ हुआ। इससे इष्ट गुणित दृष्ट $9 \times 6 = 54$ को भाग देने पर $54 \div \frac{1}{2} = \frac{54 \times 2}{1} = 108$ कमल की संख्या हुई।

विशेष—इस उदाहरणमें ६० का कोई गुणा इष्ट कल्पना करने से अभिन्न विधि से उत्तर होता है यथा इष्ट = ६० है, तो प्रश्न के अनुसार $\frac{50}{3} + \frac{50}{4} + \frac{50}{5} + \frac{50}{6} = 20 + 12 + 10 + 8 = 50$ ।

∴ $60 - 50 = 10$ । अब दृश्य ६ को इष्ट ६० से गुणा कर $(6 \times 60 = 360)$, ३ से भाग देने पर राशि = $120 = \frac{3}{4} \times 60$ इसी तरह १२०, २४०, ३६०, आदि इष्ट से उत्तर होता है।

अथ शेषजातौ विशेष सूत्रम् ।

छिद्वातभक्तेन लवोनहारघातेन भाज्यः प्रकटाख्यराशिः ।
राशिर्भवेच्छेषलवे तथेदं विलोमसूत्रापि सिद्धिमेति ॥ १ ॥

प्रकटाख्यराशिः छिद्वातभक्तेन लवोनहारघातेन भाज्यः लब्धिः शेषलवे राशिः भवेत् । तथा इदं विलोमसूत्रात् अपि सिद्धि एति ।

शेष जाति में अपने २ अंशों से घटे हुये हरों के घात को, हरों के घात से भाग देकर जो, हो उससे दृश्य को भाग देने पर राशि होती है। विलोम विधि से भी यह सिद्ध होता है।

उपपत्ति:—कल्प्यते दृश्यम् = दृ = रा $\frac{रा \times क}{ग}$ $\left\{ \frac{रा \times क}{ग} \right\} \frac{च}{म}$

$$= \frac{रा \times ग - रा \times क}{ग} \frac{च}{म} \frac{(रा \times ग - रा \times क) च}{ग \times म}$$

$$= \frac{रा \times ग \times म - रा \times क \times म - रा \times ग \times च + रा \times क \times च}{ग \times म}$$

$$= \frac{रा (ग \times म - क \times म - ग \times च + क \times च)}{ग \times म}$$

$$= रा \left\{ \frac{ग (म - च) - क (म - च)}{ग \times म} \right\}$$

वा— $\frac{10}{2}$ और $\frac{10}{4}$ का अन्तर करने से $\frac{10}{6}$ होता है। इससे इष्ट गुणित इष्ट को भाग देने पर राशि होती है।

अथवा—'द्विद्वातभक्तेन' इत्यादि सूत्र से—

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{10}{6}$ इनके हरों में अपने २ अंशों को घटाने से १, ७, ३ और ४ हुये। इनका गुणन फल = $१ \times ७ \times ३ \times ४ = ८४$ हुआ। इसमें हरों के घात से भाग दिया, तो $\frac{१ \times ७ \times ३ \times ४}{२ \times ४ \times ४ \times ६} = \frac{१०}{६}$ हुआ। इससे हरय ६३ में भाग दिया तो $६३ \div \frac{१०}{६} = \frac{६३ \times ६}{१०} = ९ \times ६० = ५४०$ राशि का मान आया।

अथवा—भागापवाह विधि से—क्रिया करने पर—

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{10}{6} = \frac{४}{१०}, \frac{३}{६}, \frac{३}{६} = \frac{३३}{६०}, \frac{३}{६} = \frac{६४}{६०} = \frac{१०}{६}$ अब हरय ६३ को $\frac{१०}{६}$ से भाग दिया तो राशि = ५४०।

अथवा—विलोम विधि से— $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{10}{6}$ इन अंशों से ऊन होने के कारण लवोन हर को हर तथा अंश को वैसे ही रख कर न्यास करने से $\frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{10}{6}$ ये भाग हो गये। ये भाग ऋण हैं, अतः विलोम विधि में ये धन हो जायेंगे। अब सूत्र के अनुसार हरय = ६३। $६३ + \frac{६३ \times ६}{६} = ६३ + \frac{६३ \times ३}{३}$

$$= ६३ (१ + \frac{३}{३}) = \frac{६३ \times ५}{३}। अब \frac{६३ \times ५}{३} + \frac{६३ \times ५}{३} \times \frac{१}{३}$$

$$= \frac{६३ \times ५}{३} (१ + \frac{१}{३}) = \frac{६३ \times ५ \times ४}{३} = २१ \times ५ \times २ = २१०।$$

$$\text{फिर } २१० + \frac{२१० \times ३}{३} = २१० + ३० \times २ = २१० + ६० = २७०।$$

$$\text{पुनः } २७० + \frac{२७० \times १}{१} = ५४० \text{ राशि।}$$

अथ विश्लेषजात्युदाहरणम्।

पञ्चमांशोऽलिकुलात् कदम्बमगमत् त्र्यंशः शिलीन्ध्रं तयो-

र्विश्लेषपस्त्रिगुणो मृगाक्षि ! कुटजं दोलायमानोऽपरः।

कान्ते ! केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रिया-

दूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृङ्गोऽलिसङ्घ्यां वद ॥ ४ ॥

हे मृगनयनि ! हे प्रिये ! जिन भौरों का पञ्चमांश ($\frac{1}{5}$) कदम्ब पर, तृतीयांश ($\frac{1}{3}$) शिलीन्ध्र पुष्प पर और इन दोनों का त्रिगुणित अन्तर कुटज पुष्प पर चला गया तब बचा हुआ १ भ्रमर केतकी और मालती प्रिया के परिमल रूप दूत से एक ही समय में बुलाये जाने के कारण आकाश में इधर उधर भटक रहा था, उन भौरों की संख्या बताओ।

हे गणक! सुरत कच्छ में किसी कामिनी के मोती की माला टूटने से उसका $\frac{1}{2}$ जमान पर, $\frac{1}{3}$ विस्तर पर, $\frac{1}{4}$ कामिनी को मिला और $\frac{1}{5}$ उसके स्वामी को मिला । शेष छे मोती धागे में लगे थे, तो कुछ मोतियों की संख्या बताओ ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास— $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ हरय = ६ । अब इष्ट १ मान कर उक्त भागों का योग कुछ बटाने से शेष = $१ - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = १ - \frac{77}{60} = १ - १\frac{17}{60} = \frac{43}{60}$ । इससे इष्ट गुणित हरय $१ \times ६ = ६$ में भाग देने पर कुछ मोतियों की संख्या = $६ \div \frac{43}{60} = \frac{३६०}{४३} = ३०$ ।

अन्य: प्रश्न: ।

यूथार्थं सत्रिभागं वनविचरगतं कुञ्जराणां च दृष्टं
पद्मभागश्चैव नद्यां पिवति च सलिलं सप्रभांशेन मित्रः ।
पद्मिन्यां चाष्टभांशः स्यनवमसहितः क्रीडते सानुरागो
नागेन्द्रो हस्तिनीभिस्तिन्मृभिरनुगतः का भवेद्युथसंख्या ॥ ३ ॥

किसी जंगल में हाथियों का एक बड़ा झुण्ड था । उस झुण्ड का आधा ($\frac{1}{2}$) अपने ($\frac{1}{3}$) से युक्त होकर वन के नीचे, अपने ($\frac{1}{4}$) से युक्त ($\frac{1}{5}$) नदी में पानी पीने के लिये और अपने ($\frac{1}{6}$) से युक्त ($\frac{1}{7}$) कमलवन में गया । शेष ३ हथिनियों के पीछे १ हाथी प्रेम से क्रीड़ा करते हुये देखा गया तो, यूथ की संख्या बताओ ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास कर योग करने से $\frac{1}{2} + \frac{१}{३} + \frac{1}{४} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{७} = \frac{1}{2} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{७} = \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{७} = \frac{२२३+१४०+१०५+८४+७०+६३}{४२०} = \frac{६८५}{४२०}$ । इष्ट १ में बटाने से शेष हस्ती = $१ - \frac{६८५}{४२०} = \frac{७३५}{४२०} = \frac{२४५}{१४०}$ ।

अब हरय ३ को इष्ट १ से गुणा कर $\frac{२४५}{१४०}$ से भाग देने पर यूथ संख्या = $३ \times १ \div \frac{२४५}{१४०} = ३ \times २४२ = १००८$ । अथवा भागानुबन्ध से भी उत्तर होगा ।

अन्य: प्रश्न: ।

पद्माद्या प्रियकल्पिताद्भुसुत्वा भूया ललाटीकृवा
यच्छेषात्त्रिगुणात्त्रिभागरचिता न्यस्ता स्तनान्तः क्षतिः ।
शेषार्थं भुजनालयोर्नगिनगः शेषाद्विकरश्यादितः
काञ्च्यात्मा नगिराशिमायु यद् ने वेण्यां हि यत् पोडरा ॥ ४ ॥

$$\therefore \frac{\text{शे}}{\text{शे}'} = \frac{\text{क (य ७ इ)}}{\text{क (य ७ इ')}} = \frac{\text{य ७ इ}}{\text{य ७ इ}'}$$

$$\therefore \text{शे} \times (\text{य ७ इ}') = \text{शे}' \times (\text{य ७ इ}) ।$$

$$\text{वा शे} \cdot \text{य ७ शे}' \cdot \text{इ}' = \text{शे}' \cdot \text{य ७ शे}' \cdot \text{इ} \text{ वा शे}' \cdot \text{य ७ शे}' \cdot \text{य} = \text{शे}' \cdot \text{इ}' \cdot \text{य} \cdot \text{शे}' \cdot \text{इ}$$

$$= \text{य (शे}' \cdot \text{य}) = \text{शे}' \cdot \text{इ}' \cdot \text{य} \cdot \text{शे}' \cdot \text{इ} ।$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{शे}' \cdot \text{इ}' \cdot \text{य} \cdot \text{शे}' \cdot \text{इ}}{\text{शे}' \cdot \text{य}} \text{ अत उपपन्नम् ।}$$

अत्रोदाहरणम् ।

एकस्य रूपत्रिंशती पट्ट्या अथवा दशान्यस्य तु तुल्यमूल्याः ।

ऋणं तथा रूपशतं च तस्य तौ तुल्यवित्तौ च किमन्वमूल्यम् ॥ १ ।

एक व्यक्ति के पास समान मूल्य वाले ६ घोड़े और ३०० रुपये हैं, दूसरे के पास उसी तरह के १० घोड़े हैं और १०० रुपये ऋण हैं, लेकिन दोनों धन समान हैं, तो १ घोड़े का मूल्य बताओ ।

उदाहरण—प्रथम दृष्ट = २० । अब प्रश्न के अनुसार दोनों के धन बराबर से— $३००० + २० \times ६ = ४२०$ ।

$२० \times १० - १०० = १००$ । इन दोनों का अन्तर = $४२० - १०० = ३२० =$ प्रथम शेष ।

दूसरा दृष्ट = २५ । इस दृष्ट पर से पहले का धन = $३०० + २५ \times ६ = ४५०$ । दूसरे का $२५ \times १० - १०० = १५०$ । इन दोनों का अन्तर = $४५० - १५० = ३०० =$ द्वि० शेष । अब प्रथम शेष ३२० को द्वितीय दृष्ट २५ एवं द्वि० शेष ३०० को प्रथम दृष्ट २० से गुणा करने पर ८०००, ६००० हुये । इन दोनों का अन्तर = $८००० - ६००० = २०००$ । इसे शेषान्त $३२० - ३०० = २०$ से भाग दिया—तो १ घोड़े का मूल्य = $२००० \div २० = १००$ रु० ।

\therefore प्रथम व्यक्ति का धन = $३०० + १०० \times ६ = ९००$ । २ व्यक्ति का धन = $१०० \times १० - १०० = १००० - १०० = ९००$ ।

इति द्विष्टकर्म ।

- (३) एक को १० हाथी और ५०० रु० हैं, दूसरे को १५ हाथी और ४९५ रु० हैं । दोनों के धन समान हैं अतः हाथी का मूल्य बताओ ।
- (४) ५० मन धान + ४०० रु० = ७५ मन धान + १५ रु० तो, धान का मूल्य बताओ ।
- (५) २० मन गेहूँ - ५० रु० = ४० मन गेहूँ - ५५० रु० का तो, गेहूँ का मूल्य बताओ ।

इति द्वीष्टकर्म-परिशिष्ट-विधिः ।

संक्रमणे करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

योगोऽन्तरेणोनयुतोऽधितस्तौ राशी स्मृतं संक्रमणाख्यमेतत् ।

योगः अन्तरेण ऊनः युतश्च कार्यस्ततः तौ अधितौ कार्यौ, तदा राशी स्याताम् । एतत् संक्रमणाख्यं स्मृतम् ।

किन्हीं दो राशियों के योग और अन्तर ज्ञात रहने पर उन दोनों राशियों का ज्ञान जिस गणित से हो उसे संक्रमण कहते हैं । इस विधि में योगाङ्क को दो जगह लिखकर उसमें अन्तराङ्क को क्रम से घटाकर और जोड़कर बाधा करने से दोनों राशियाँ होती हैं ।

उपपत्तिः—योगः = यो + अ, अन्तरम् = अं = अ - क ।

∴ यो + अं = (अ + क) - (अ - क) = २ अ ।

∴ अ = $\frac{यो + अं}{२}$, एवं यो - अं = २ क ।

∴ क = $\frac{यो - अं}{२}$

अत उपपन्नम् ।

अत्रोद्देशकः ।

ययोर्योगः शतं सैकं, वियोगः पञ्चविंशतिः ।

तौ राशी वद मे वत्स ! वेत्सि संक्रमणं यदि ॥ १ ॥

हे वरस ! यदि तुम संक्रमण गणित की विधि जानते हो, तो जिन दो

परिशिष्ट ।

(१) वर्गान्तर और राशि योग के ज्ञान से राशियों का ज्ञान इस प्रकार होता है । यथा वर्गान्तर = २५, राशि योग = २५

$$\therefore \frac{\text{वर्गान्तर}}{\text{रा.यो}} = \frac{२५}{२५} = १ = \text{अन्तर । अब संक्रमण से राशि} = \frac{२५-१}{२} =$$

$$\frac{२४}{२} = १२ = \text{छोटी संख्या ।}$$

$$\therefore २५ - १२ = १३ = \text{बड़ी संख्या ।}$$

(२) वर्ग योग और राश्यन्तर या राशि योग के ज्ञान से राशि ज्ञान ।

$$\text{वर्ग योग} \times २ - \text{राशियोग वर्ग} = \text{अन्तर वर्ग ।}$$

$$\text{वर्ग योग} \times २ - \text{अन्तर वर्ग} = \text{योग वर्ग ।}$$

इनका मूल योग या अन्तर होगा । तब संक्रमण से राशि ज्ञान करना चाहिये ।

जैसे—वर्ग योग = ६८९, राश्यन्तर = १७ ।

$$\therefore ६८९ \times २ - (१७)^२ = १३७८ - २८९ = १०८९ = \text{राशि योगवर्ग ।}$$

$$\therefore \sqrt{१०८९} = ३३ = \text{राशि योग ।}$$

$$\therefore \frac{३३+१७}{२} = २५ = ८ प्र० रा० ।$$

एवं $\frac{३३-१७}{२} = ८ = \text{द्वि० रा० ।}$ इसी तरह वर्ग योग और राशि योग पर से भी राशियों का ज्ञान करना चाहिए ।

(३) वनान्तर और राश्यन्तर के ज्ञान से राशियों का ज्ञान ।

वनान्तरं राशिवियोगभक्तं वियोगवर्गेण विहीनितं तत् ।

चतुर्गुणं रामद्वृतं वियोगकृत्या युतं मूलमतो हि राशी ॥ १ ॥

वनान्तर को राश्यन्तर से भाग देकर लब्धि में अन्तर वर्ग घटा कर शेष को ४ से गुणा कर ३ से भाग देकर लब्धि में अन्तर वर्ग को जाड़ कर मूल लेने से योग होता है, तब संक्रमण विधि से राशियों का ज्ञान करना चाहिए ।

उपपत्ति :— $y - r = r \cdot x = x$ । $y^2 - r^2 = v \cdot x$ ।

$$\therefore y = r + x$$
 । $y^2 = v \cdot x + r^2$

$$y^2 = (r + x)^2 = r^2 + २ r \cdot x + x^2 = v \cdot x + r^2$$

$$= ३ r \cdot x + ३ r \cdot x^2 = v \cdot x - x^2 = ३ x (r^2 + r \cdot x)$$
 ।

इष्ट गुणित अपने मूल से ऊन यदि दृश्य हो, तो उसमें गुणार्ध का जो जोड़कर मूल लेना चाहिये। मूल में फिर गुणार्ध को जोड़कर वां इसे से राशि होती है। यदि इष्ट गुणित अपने मूल से युक्त दृश्य हो, तो वहाँ अपने गुणार्ध का वर्ग जोड़कर जो मूल हो उसमें गुणार्ध घटाकर वां कते से राशि होगी।

यदि वह राशि अपने अशों से ऊन या युत हो, तो उस भाग को 1 में घटाकर या जोड़कर दृश्य और मूल गुणक में भाग दें, तो नवीन दृश्य और मूल गुणक होते हैं, उन दोनों पर से उक्त रीति द्वारा राशि का ज्ञान करना चाहिये।

उपपत्ति:—राशि: = रा।

रा = गु. $\sqrt{\text{रा}}$ = द.। पक्षयोर्वर्गपूर्व्या—

रा = गु. $\sqrt{\text{रा}} + \left(\frac{\text{गु}}{2}\right)^2 = \text{द} + \left(\frac{\text{गु}}{2}\right)^2$ । पक्षयोर्मूले—

$\sqrt{\text{रा}} = \frac{\text{गु}}{2} = \sqrt{\text{द} + \left(\frac{\text{गु}}{2}\right)^2}$ $\therefore \sqrt{\text{रा}} = \sqrt{\left(\frac{\text{गु}}{2}\right)^2 + \text{द}} \pm \frac{\text{गु}}{2}$

$\therefore \text{रा} = \left(\sqrt{\left(\frac{\text{गु}}{2}\right)^2 + \text{द}} \pm \frac{\text{गु}}{2}\right)^2$ उपपन्नं पूर्वार्द्धम्।

यदा लवैश्चोनयुतश्च राशिरित्यस्य—

रा = $\frac{\text{रा} \times \text{क}}{\text{अ}}$ = गु $\sqrt{\text{रा}}$ = द

= रा $\left(1 = \frac{\text{क}}{\text{अ}}\right)$ = गु $\sqrt{\text{रा}}$ = द। पक्षौ $1 = \frac{\text{क}}{\text{अ}}$ अनेन भक्षौ

तदा रा = $\frac{\text{गु} \sqrt{\text{रा}}}{1 = \frac{\text{क}}{\text{अ}}} = \frac{\text{द}}{1 = \frac{\text{क}}{\text{अ}}}$

अस्य कृतिः १ । दलिता ३ । सैका ३ । अयमपरो राशिः ।

एवमेतौ राशी ३ । ३ ।

एवमेकेनेष्टेन जातौ राशी ६, ६ । ३ द्विकेन ३३ ।

अथ द्वितीयप्रकारेणोष्टम् १ । अनेन द्विगुणेन २ । रूपंभक्तम् ३ इष्टेन सहितं जातः प्रथमो राशिः ३ । द्वितीयो रूपम् १ । एवं राशी ३ ३

एवं द्विकेन ३ ३ । त्रिकेन ३ ३ । त्र्यंशेन ३ जातौ राशी ३, ३ ।

उदाहरण—यहाँ इष्ट = ३ मान लिया । अब सूत्र के अनुसार $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ । $\frac{1}{9} \times 9 = 1$ । $2 - 1 = 1$ । $\frac{1}{3}$ । $\frac{1}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{1} = 1 =$ प्रथम राशि । अब १ का वर्ग का आधा $(\frac{1}{3})$ में १ जोड़ा तो $\frac{4}{9} =$ द्वितीय राशि ।

दूसरा प्रकार—यदि इष्ट = १ है तो १ में द्विगुणित इष्ट से भाग देकर १ जोड़ने पर 'प्रथम राशि = $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ । द्वितीय राशि = १ । इसी तरह दो तीन आदि इष्ट मानकर अनेक राशियाँ होती हैं ।

अथवा सूत्रम् ।

इष्टस्य वर्गवर्गो घनश्च तावष्टसंगुणौ प्रथमः ।

सैको राशी स्यातामेवं व्यक्तेऽथ वाऽव्यक्ते ॥ ४ ॥

इष्ट के वर्ग वर्ग और घन को ८ से गुणा कर दो जगह रखें । पहले में १ जोड़ दें तो प्रथम राशि और दूसरी राशि अष्टगुणित घन ही होता है । इसी तरह व्यक्त और अव्यक्त में राशियाँ होती हैं ।

उपपत्तिः—अत्र कल्पितौ राशी य + १ । क १

∴ $(य + १)^२ + क^२ - १ =$ वर्ग ।

∴ $य^२ + २य + १ + क^२ - १ = य^२ + २य + क^२ = य^२ + क^२ + २य$

अत्र मूलग्रहणीत्या - $२य \sqrt{२य} = क^२$ ।

∴ $४य^२ \times २य = क^४ = ८य^३ = क^४$ । अत्र य = क \times इ ।

∴ $य^३ = क^३ \times इ^३$ ।

∴ $८य^३ = क^३ \times इ^३ \times ८ = क^४$ । पचाँ क^३, अनेन भक्तौ तदा $८इ^३ = क$,

अनेनोत्थापितौ राशी = $८इ^४ + १$ । $८इ^३$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

न्यासः । मूलगुणः ६ दृश्यम् १२४० । गुणार्धं $\frac{१}{३}$ मस्य कृत्या $\frac{६३}{४}$ युक्तं जातम् $\frac{५० \times १}{४}$ । अस्य मूलं $\frac{५३}{४}$ । गुणार्धेन $\frac{१}{३}$ अत्र विहीनं $\frac{६३}{४}$ वर्गीकृतं $\frac{३८ \times ४}{४}$ । छेदेन हृते जातो राशिः ६६१ ।

उदाहरण = मूल गुणक ९ । दृश्य = १२४० । सूत्र के अनुसार गुणार्ध के वर्ग $(\frac{१}{३})^2 = \frac{६३}{४}$ को दृश्य १२४० में जोड़ कर मूल लेने से $-\frac{६३}{४} + १२४० = \frac{६३ + ४ \times १२४०}{४} = \frac{५० \times ४}{४}$ । $\sqrt{\frac{५० \times ४}{४}} = \frac{७३}{४}$, यह हुआ । इसमें गुणार्ध $(\frac{१}{३})$ को घटा कर वर्ग करने से राशि = $(\frac{७३}{४} - \frac{१}{३})^2 = (\frac{६३}{४})^2 = (३१)^2 = ९६१$ ।

भागोने उदाहरणम् ।

यातं हंसकुलस्य मूलदशकं मेघागमे मानसं
प्रोद्धीय स्थलपद्मिनीवनमगादष्टांशकोऽम्भस्तटात् ।
बाले ! बालमृणालशालिनि जले केलिक्रियालालसं
दृष्टं हंसयुगत्रयं च सकलां यूथस्य संख्यां वद ॥ ३ ॥

हे बाले ! वर्षा ऋतु आने पर किसी हंस-समूह का १० गुणित मूल मानस सरोवर को गया और उसी का $\frac{१}{३}$ जल के किनारे से उड़ कर स्थलकमलिनी-वन को गया । शेष कोमल कमल-नालों से शोभित जल में क्रीड़ा की लालसा से ३ जोड़े (६) हंसों को मैंने देखा, तो कुल हंसों की संख्या बताओ ॥ ३ ॥

न्यासः । मूलगुणः १० । अष्टांशः $\frac{१}{३}$ । दृश्यम् ६ । यदा लवैश्चोनयुत-इत्युक्तत्वादत्रैकेन भागोनेन $\frac{६}{३}$ दृश्यमूलगुणौ भक्त्या जातं दृश्यम् $\frac{५६}{३}$ मूलगुणः $\frac{६३}{४}$ । गुणार्धम् $\frac{१}{३}$ । अस्य कृत्या $\frac{१६३०}{४}$ युक्तम् $\frac{१५३६}{४}$ अस्य मूलं $\frac{५३}{४}$ गुणार्धेन $\frac{१}{३}$ युक्तं १२ वर्गीकृतं जातो हंसराशिः १४४

उदाहरण—इस उदाहरण में राशि अपने $\frac{१}{३}$ भाग से ऊन है अतः 'यदा लवैश्चोनयुतश्च राशिः' इस सूत्र के अनुसार १ में $\frac{१}{३}$ को घटाकर शेष से दृश्य (६) और मूलगुणक (१०) में भाग देने पर नवीन दृश्य और मूलगुणक होंगे । जैसे— $१ - \frac{१}{३} = \frac{२}{३}$ ∴ $६ \div \frac{२}{३} = \frac{६ \times ३}{२} = \frac{१८}{२} = ९$ नवीन दृश्य । $१० \div \frac{२}{३} = \frac{१० \times ३}{२} = \frac{३०}{२} = १५$ नवीन मूलगुणक । अब 'गुणार्धकृत्या युक्तस्य दृश्यस्य' इसके अनुसार क्रिया करने पर—गुणार्ध = $\frac{१}{३}$ ∴ $\frac{१८}{२} = \frac{१८}{३} = ६$ । $(\frac{१८}{३})^2 = \frac{३२४}{९} = ३६$ ।

बन्द होने के कारण गूँजते हुये एक भौरे के प्रति बाहर में १ भ्रमरी भी गूँज रही थी, तो कुल भ्रमरों की संख्या बताओ ॥ ५ ॥

अत्र किल राशिनवांशाष्टकं राश्यर्धमूलं च राशेर्ऋणं, द्वयं रूपं दृश्यम् । एतदृणं दृश्यं चार्धितं राश्यर्धस्य भवतीति । तत्रापि राश्यंशार्धं राश्यंशार्धस्यांशः स्यादिति भागः स एव ।

तथा न्यासः । भागः $\frac{1}{2}$ । मूलगुणकः $\frac{1}{2}$ । दृश्यम् १ राश्यर्धस्य स्यादिति भागन्यासोऽत्र । अतः प्राग्बल्लब्धं राशिदलम् ३६ ।

एतद्विगुणितमलिकुलमानम् ७२ ।

उदाहरण—इस प्रश्न में राशि अवर्गाङ्क है, क्योंकि भाधे का मूल होता है । अतः दृश्य और मूल गुणक के भाधे पर से क्रिया करने पर राशि के भाधे का ज्ञान होगा । उसको दूना करने पर राशि होगी । जैसे—मूल गुणक = $\frac{1}{2}$, भाग $\frac{1}{2}$, दृश्य १ । अब पहली रीति से क्रिया करने पर— $१ - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ । $१ \div \frac{1}{2} = २ = न.द.$ । $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = १ = न० मूल गु०$ । गुणार्ध = $२ \times १ = २$ ।

$$\therefore न. द. १ + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = १ + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4 + 1}{4} = \frac{५}{४}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{५}{४}} = \frac{1}{2} \sqrt{५} = \frac{1}{2} \sqrt{५} + \frac{1}{2} = \frac{५}{४} = ६ । (६)^2 = ३६ = राश्यर्ध ।$$

$$\therefore ३६ \times २ = ७२ = भ्रमर की संख्या ।$$

अथ भागयुते उदाहरणम् ।

यो राशिरष्टादशभिः स्वमूलैः राशिभिर्भागेन समन्वितश्च ।

जातं शतद्वादशकं तमाशु जानीहि पाट्यां पटुताऽस्ति ते चेत् ॥ ६ ॥

यदि तुम्हें पाटीगणित में पटुता है, तो वह राशि बताओ, जिसमें अपने मूल का १८ गुणा और अपना $\frac{1}{3}$ भाग जोड़ने पर १२०० होता है ॥ ६ ॥

न्यासः । भागः $\frac{1}{3}$ मूलगुणकः १८ । दृश्यम् १२०० । अत्रैकेन भागयुतेन $\frac{1}{3}$ मूलगुणं दृश्यं च भक्त्वा प्राग्बल्लब्धो राशिः ५७६ ।

उदाहरण—मूल गुणक = १८, भाग = $\frac{1}{3}$, दृश्य १२०० । इस प्रश्न में भाग $\frac{1}{3}$ युत है अतः १ में $\frac{1}{3}$ को जोड़ कर मूल गुणक और दृश्य में भाग देने पर नवीन मूल गुणक और नवीन दृश्य होंगे । जैसे— $१ + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ । दृश्य

अथ त्रैराशिके करणसूत्रं वृत्तम् ।

प्रमाणमिच्छा च समानजाती आद्यन्तयोस्तत्फलमन्यजातिः ।

मध्ये तदिच्छाहतमाद्यहृत् स्यादिच्छाफलं व्यस्तविधिविलोमे ॥७॥

प्रमाणम् इच्छा च समानजाती भवतः । ते आद्यन्तयोः स्याप्ये । फलम् अन्यजातिः भवति, तत् मध्ये स्थाप्यम् । तत् फलम् इच्छा हतम् आद्यहृत् तदा इच्छाफलम् स्यात् । विलोमे व्यस्तविधिः कार्यः ॥ ७ ॥

तीन ज्ञात राशियों से चौथी राशि का ज्ञान जिस गणित से होता है, उसे त्रैराशिक कहते हैं । यहाँ आचार्य ने तीनों ज्ञात राशियों के नाम क्रम से प्रमाण, प्रमाण फल और इच्छा रखा है । अज्ञात चौथी राशि का नाम इच्छा फल है । प्रमाण और इच्छा एक जाति की होती है । इनको आदि और अन्त में लिखना चाहिये । प्रमाण फल को इच्छा से गुणा कर प्रमाण से भाग देने पर इच्छा फल होता है ।

जैसे—किसी ने प्रश्न किया कि १ ६० में ५ आम मिलते हैं, तो ५ ६० में कितने मिलेंगे । यहाँ १ ६० = प्रमाण । ५ आम = प्रमाण फल । ५ ६० = इच्छा । अथ पूर्व रीति से प्रमाण फल को इच्छा से गुणा कर प्रमाण से भाग दिया, तो चौथी अज्ञात राशि इच्छा फल = $\frac{५ \times ६०}{१६०} = २५$ । विलोम में अर्थात् व्यस्त त्रैराशिक में उलटी क्रिया करनी चाहिये, अर्थात् प्रमाण को प्रमाण फल से गुणा कर इच्छा से भाग देने पर इच्छा फल होता है । क्रम त्रैराशिक में इच्छा की न्यूनता या वृद्धि से इच्छा फल की न्यूनता या वृद्धि होती है और व्यस्त त्रैराशिक में इसकी उलटी रीति समझनी चाहिए । आगे ग्रन्थकार ने खुद ही स्पष्टीकरण किया है ।

उपपत्ति:— $\therefore \frac{\text{प्रमाण}}{\text{प्रमाणफल}} : : \frac{\text{इच्छा}}{\text{इच्छाफल}}$

$\therefore \text{प्रमाण} \times \text{इच्छाफल} = \text{प्रमाणफल} \times \text{इच्छा} ।$

$\therefore \text{इच्छा फल} = \frac{\text{प्र.फ.} \times \text{इच्छा}}{\text{प्र.०}}$, उपपन्नं त्रैराशिकम् । व्यस्तत्रैराशिके तु—

$\frac{\text{प्र.फ.}}{\text{इ.०}} = \frac{\text{इ.फ.}}{\text{प्र.०}} \therefore \text{इ.फ.} = \frac{\text{प्र.फ.} \times \text{प्र.०}}{\text{इ.०}} ।$

और १५ रु० में १ और ३ का सम्बन्ध है। इसलिये ५ रु० और १५ रु० का अनुपात $\frac{१}{३}$ है। इसी तरह १ मन और २५ सेर में ($\frac{५०}{३०} = \frac{५}{३}$) का अनुपात है और १ शि० और २ पें० में ($\frac{१२}{६} = \frac{२}{१}$) का अनुपात है।

उपरोक्त अनुपातों को हम नीचे लिखे तरीके से भी लिख सकते हैं—

यथा $\frac{५}{१५} = \frac{१}{३}$, या ५ : १५ :: १ : ३

$\frac{५०}{३०} = \frac{५}{३}$, या ४० : २५ :: ८ : ५

और $\frac{१२}{६} = \frac{२}{१}$, या १२ : ६ :: २ : १

किसी अनुपात या निष्पत्ति का मान उसकी दोनों राशियों की एक ही संख्या से गुणा वा भाग देने से नहीं बदलता।

यथा $\frac{५}{१५} = \frac{१०}{३०} = \frac{३०}{९०} = \frac{१२०}{३६०} = \frac{१}{३}$ आदि।

(२) दो अनुपातों के बीच पहली राशियों के गुणनफल को पहली राशि तथा दूसरी राशियों के गुणनफल को दूसरी राशि बना लेने से सम्मिलित अनुपात (निष्पत्ति) बन जाता है।

यथा १ : ३ और ८ : ५ का सम्मिलित अनुपात $\frac{१ \times ८}{३ \times ५} = ८ : १५$

(३) यदि चार राशियाँ ऐसी हों जिनमें पहली और दूसरी की निष्पत्ति तीसरी और चौथी की निष्पत्ति के समान हो तो इन्हें समानुपाती कहते हैं।

यथा—५, ६, १५, १८ ये चारों राशियाँ समानुपाती हैं, क्योंकि यहाँ
५ : ६ :: १५ : १८ ।

यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो उन चारों को सजातीय होने की आवश्यकता नहीं। उनमें केवल पहली और दूसरी तथा तीसरी और चौथी राशि को सजातीय होना चाहिये, यथा ३ रु०, ५ रु०, १२ मन और २० मन ये चारों राशियाँ समानुपाती हैं क्योंकि यहाँ ३ रु० और ५ रु० की निष्पत्ति १२ मन तथा २० मन की निष्पत्ति के बराबर है।

(४) समानुपात में पहली और चौथी संख्या को अन्य राशि तथा दूसरी और तीसरी को मध्य राशि कहते हैं।

- (५) ६ गज २ गज २ फीट और २ ह० ।
८ एकड़ २४ एकड़ १८ मनुष्य ।
१८० ह० ५०० ह० और १२ पौ० ।
- (६) यदि ३० चीजों का मूल्य ३०० ह० है, तो १३ चीजों का मूल्य बताओ ।
- (७) यदि १५ हल १३५ बीघे खेत को जोतते हैं, तो ८१ हल कितने खेतों को जोतेंगे ।
- (८) प्रति घण्टे ३० मील की चाल से बंगाल से पंजाब जाने में ४५ घण्टे लगते हैं, तो प्रति घण्टे ३५ मील की चाल से कितना समय लगेगा ।
- (९) वृत्त की परिधि और व्यास में २२ : ७ का अनुपात है, तो जब व्यास २८ है तो परिधि बताओ ।
- (१०) दो धन की संख्या ३ और ५ की समानुपाती है । यदि उनमें पहली १८ मन हो, तो दूसरी बताओ ।
- (११) जब राम ८ ह० कमाता है, श्याम १० ह० कमाता है, और जब श्याम ५ ह०, तब यदु २५ ह० और जब यदु २१ ह० तब मोहन ३९ ह० तो चारों की कमाइयों की तुलना करो ।
- (१२) ७७ गैलन मिली हुई वस्तु में दूध और पानी का अनुपात ६ : ५ है, तो उसमें दूध और पानी कितना-कितना है ।
- (१३) एक शिकारी ने एक हिरण का पीछा किया । जितनी देर में शिकारी २ छलांग भरता है, हिरण ३ छलांग भरता है, यदि शिकारी की ५ छलांग हरिण के ८ छलांग के समान हो, तो दोनों की चालों की तुलना करो ।

इति त्रैराशिकपरिशिष्टम् ।

अथ पञ्चराशिकादौ करणसूत्रं वृत्तम् ।

पञ्चसप्तनवराशिकादिकेऽन्योन्यपक्षनयनं फलच्छिदाम् ।

संविधाय बहुराशिजे वधे स्वल्पराशिवधभाजिते फलम् ॥ ९ ॥

पञ्चसप्तनवराशिकादिके फलच्छिदां अन्योन्यपक्षनयनं संविधाय बहुराशिजे वधे स्वल्पराशिवधभाजिते फलं स्यात् ।

बहूनां राशीनां वचः १२०० । स्वल्पराशिवचन १०० सत्त्वा लब्धा-
माप्ताः १२ ।

मूलधनार्थं न्यासः । $\left. \begin{array}{l} १२ \\ ५ \end{array} \right| \frac{१२}{५} \left| \begin{array}{l} १२ \\ ५ \end{array} \right|$ पूर्ववत्तन्व्यं मूलधनम् १६ ।
यत्र सवत्र ।

उदाहरण—यहाँ प्रश्न के अनुसार प्र० का १ प्र० घ १०० और प्र० च ०
५ हैं । इ० का १२, इ० घ १६ और इच्छाफल ० हैं, यही हर स्थायी है ।
अब प्रमाणफल और इष्ट (इच्छाफल) का स्थान भाग में बदल दिया तो—
पहला पत्र = प्र०का १, प्र०घन १०० और इच्छाफल (हर) यह हुआ ।
दूसरा पत्र = इ०का १२, इ०घ १६ और प्रमाणफल ५ हुआ । इन दोनों पत्रों
में दूसरा पत्र अधिक है अतः इन अधिक राशियों के वात में दूसरे अत्र
राशियों के वात से भाग दिया तो— $१२ \times १६ \times ५ \div १ \times १०० = १२ \times$
 $८० \div १०० = १२ \cdot ८ \div ५ = \frac{१२८}{५}$ मूद्र हुआ ।

समय जानने के लिये न्यास करने पर—

प्र०का	१	}	इ०का	० फल और हर की वगइ प्र०का	१	}	इ०का	०	
प्र०घ	१००		इ०घ	१६ भाग में बदलने	प्र०घ		१००	इ०घ	१६
प्र०च	५		इ०च	$\frac{१२}{५}$ पर	हर ४८		प्र०च	$\frac{१२}{५}$	

अब सूत्र के अनुसार—बहुराशि वच = $१ \times १०० \times ४८$ अत्र राशि
वच = $१६ \times ५ \times ५$ । $\therefore १ \times १०० \times ४८ \div १६ \times ५ \times ५ = १०० \times ४८$
 $\div १६ \times २५ = २८०० \div २०० = १२ =$ इच्छा फल ।

मूलधन के लिये न्यास—

प्र०का	१	}	इ०का	१२ फल और हर की प्र०का	१	}	इ०का	१२
प्र०घ	१००		इ०घ	० वगइ बदलने से प्र०घ	१००		इ०घ	०
प्र०च	५		इ०च	$\frac{१२}{५}$	हर ४८		प्र०च	$\frac{१२}{५}$

अब सूत्र के अनुसार $\frac{\text{बहुराशिवच}}{\text{अत्रराशिवच}} = \frac{१ \times १०० \times ४८}{१ \times ५ \times ५} = १६$ मूलधन

इसी तरह आगे भी समझना चाहिये ।

उदाहरणम् ।

सुश्रंशामसेन शतस्य चैन् स्वान् कलान्तरं पञ्च सपञ्चमांशाः ।

नासैत्रिभिः पञ्च तथाधिकेस्तन् सायंदिपष्टैः फलमुच्यतां चिन् ? ॥ २ ॥

अत्रानुपातः—यदि प्रथममूल्येन प्रथमफलं तदा द्वितीयमूल्येन किमिति
द्वितीयमूल्यसम्बन्धि-फलम् = $\frac{\text{प्र. फ.} + \text{द्वि. मू.}}{\text{प्र. मू.}}$ । पुनरनुपातः—यद्यनेन

(विनिमयेन) द्वितीयफलं तदा प्रथमेष्टेन किमिति जातं द्वितीयेष्टम्
= $\frac{\text{द्वि. फ.} \times \text{प्र. ह.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{द्वि. मू.}} = \frac{\text{प्र. मू.} \times \text{प्र. ह.} \times \text{द्वि. फ.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{द्वि. मू.}}$ अत उपपन्नम् ।
प्र. मू.

उदाहरणम् ।

द्रुमेण लभ्यत इहाम्रशतत्रयं चेत्
त्रिंशत् पणैः विपणौ वरदाडिमानि ।

आम्रैर्वदाशु दशभिः कति दाडिमानि

लभ्यानि तद्विनिमयेन भवन्ति मित्र ! ॥ १ ॥

हे मित्र ! १ द्रुम में ३०० आम और १ पण में ३० दाड़िम मिलते हैं,
तो १० आम के बदले कितने दाड़िम मिलेंगे, यह शीघ्र बताओ ।

न्यासः । $300 \left| \begin{array}{l} 30 \\ 10 \end{array} \right. \text{ । लब्धानि दाडिमानि } 16 \text{ ।}$

उदाहरण—यहाँ द्रुम को पण बनाकर मूल में न्यास किया गया है ।
पचनयन करने से बहुराशि वध = $16 \times 30 \times 10$ । अक्षराशि वध =
 1×300 । ∴ भाग देने पर फल = $\frac{16 \times 30 \times 10}{1 \times 300} = \frac{16 \times 30 \times 1}{1 \times 30}$
= १६ दाड़िम ।

इति लीलावत्यां प्रकीर्णकानि ।

परिशिष्ट ।

ऐकिक नियम ।

एक चीज के मूल्य, तौल या लम्बाई आदि जानकर अनेक चीजों के
मूल्य, तौल या लम्बाई आदि, तथा अनेक चीजों के मूल्य तौल या लम्बाई
आदि जानकर एक चीज के मूल्य, तौल या लम्बाई आदि जानने की विधि
को ऐकिक नियम कहते हैं । भाग या गुणा के द्वारा ऐकिक नियम की क्रिया
होती है । यथा—

- (७) जय ८ मन गेहूँ का मोल ७४ रु० हो, तब १७ मन का दाम बताओ !
 \therefore ८ मन गेहूँ का मोल = ७४ रु० ।
 \therefore १ मन गेहूँ का मोल = $७४ \text{ रु०} \times \frac{१}{८}$ ।
 \therefore १७ मन गेहूँ का मोल = $७४ \text{ रु०} \times \frac{१७}{८} = १५७ \text{ रु० } ४ \text{ आ०} ।$
- (८) यदि ३ सेर चीनी ७ रु० ८ आ० में मिलती हो, तो १२ रु० ८ आ० में कितनी मिलेगी ?
 \therefore ७ रु० ८ आ० = १२० आ० \therefore १२ रु० ८ आ० = २०० आ० ।
 \therefore १२० आ० मोल = ३ सेर, \therefore ४० आ० मोल = २ सेर ।
 \therefore २०० आ० मोल = १० सेर । उत्तर ।
- (९) किसी वस्तु के $\frac{३}{४}$ का मोल ९० रु० है, तो उसके $\frac{५}{६}$ का क्या मोल होगा ?
 \therefore वस्तु के $\frac{३}{४}$ का मूल्य ९० है \therefore वस्तु का मूल्य = $९० \times \frac{४}{३}$ ।
 \therefore वस्तु के $\frac{५}{६}$ का मूल्य = $९० \text{ रु०} \times \frac{४}{३} \times \frac{५}{६} = ८० \text{ रु०} ।$
- (१०) किसी काम को ३५ मनुष्य ८ दिन में पूरा करते हैं, तो उसी काम को १० दिन में कितने मनुष्य पूरा करेंगे ?
 \therefore ८ दिन में उस काम को ३५ मनुष्य पूरा करते हैं ।
 \therefore २ दिन में उस काम को ३५×४ मनुष्य करते हैं ।
 \therefore १० दिन में उस काम को $\frac{३५ \times ४}{१०} = १४$ मनुष्य करेंगे ।
- (११) किसी सेट ने १२०० छात्रों को नाने का सामान प्रिण्डल में ६० दिन के लिए भेजा । १५ दिन के बाद ३०० छात्र कम हो गये, तो वताओ शेष सामान शेष छात्रों के लिए कितने दिन के लिए ?

- ∴ क उस काम का $\frac{1}{2}$, १ दिन में, ख उसी काम का $\frac{1}{3}$, १ दिन में और ग उसी काम का $\frac{1}{4}$, १ दिन में करता है।
 ∴ उस काम के $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{13}{12}$ को १ दिन में करेगा।
 ∴ कुल काम को $\frac{13}{12} = १\frac{1}{12}$ दिन में कर सकते हैं।

(१७) राम और मोहन मिलकर १ काम को ५ दिन में करते हैं, जिसमें राम अकेला उसको ८ दिन में करता है, तो मोहन उस काम को कितने दिनों में कर सकता है ?

- ∴ राम और मोहन उस काम के $\frac{1}{5}$ को १ दिन में कर सकते हैं।
 ∴ राम उस काम के $\frac{1}{8}$ को १ दिन में करेगा।
 ∴ मोहन उस काम के $(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) = \frac{3}{40}$ को १ दिन में करेगा।
 ∴ मोहन कुल काम को $\frac{40}{3} = १३\frac{1}{3}$ दिन में करेगा।

(१८) एक हौज में दो नल लगे हैं, एक नल के द्वारा २५ मिनट में वह भरता है और दूसरे नल से २० मिनट में खाली होता है। यदि भरे हुये में दोनों को खोल दिया जाय, तो कितने समय में हौज खाली हो जायगा ?

- ∴ प्रथम नल गढ़े के $\frac{1}{25}$ को १ मिनट में भरता है और द्वितीय नल हौज के $\frac{1}{20}$ को खाली करता है।
 ∴ दोनों खोलने पर हौज का $(\frac{1}{25} - \frac{1}{20}) = \frac{1}{100}$, १ मिनट में खाली होता है।
 ∴ कुल हौज १०० मिनट में खाली हो जायगा।

(१९) एक दिवालिया को ७२४० पौ० देना है और उसके पास ५४३० पौ० का माल है, तो यताओ १ पौ० में वह कितना माल चुका सकता है ?

- ∴ ७२४० पौ० के बदले में वह ५४३० पौ० दे सकता है।
 ∴ १ पौ० के बदले में $\frac{5430}{7240} = \frac{3}{4}$ पौ० दे सकता है।

(२०) एक एजेण्ट ने ७५० रु० का माल मरीदा और २३ रु० सैम्बा के हिसाब से उसको कमीशन मिला, तो उसने कुल कमीशन कितना पाया ?

(४) किसी संख्या का दिया हुआ प्रतिशत निकालने के लिये उस संख्या को दिया हुआ प्रतिशत से गुणा कर १०० से भाग देना चाहिये।

यथा—६० का ३ प्रतिशत = $\frac{६० \times ३}{१००} = \frac{३ \times ३}{१०} = \frac{९}{१०}$ ।

(५) किसी दी हुई संख्या को दूसरी दी हुई संख्या के प्रतिशतक में प्रकट करने के लिये उस संख्या को १०० से गुणा कर दूसरी संख्या से भाग देना चाहिये। यथा—१३ रु० को ६५ रु० के प्रतिशतक में प्रकट करना है, तो $\frac{१३ \times १००}{६५} = २०\%$ ।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

(१) $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{४}{५}$ इनको प्रतिशतक में लिखो।

(२) किसी एजेंट को प्रतिशतक १३ कमीशन मिलता है तो ९६५२ रु० ८ आ० में उसे कितना कमीशन मिलेगा।

(३) किसी दलाल को प्रति सैकड़ा १० मिलता है, तो २५२५ रु० १२ आ० में उसे कितनी दलाली मिलेगी।

(४) किसी व्यक्ति को १ जमीन खरीदने में ४ प्रति सैकड़ा दलाली तथा जमीन का दाम मिलाकर १०००० रु० देना पड़ता है, तो जमीन का दाम बताओ।

(५) प्रति सैकड़ा १० रु० मिलने वाले एजेंट को २५२५ रु० १५ आ० १० पा० सामान खरीदने के लिये मिला, तो उसने कितने का सामान खरीदा और उसको कितना कमीशन मिला।

व्याज (सूद)।

(१) व्याज दो तरह के होते हैं, जो केवल मूलधन पर लगाया जाता है उसे साधारण व्याज कहते हैं। दूसरा वह है जो किसी निश्चित समय के बाद मूलधन में सूद को जोड़ कर उस पर फिर सूद लगाया जाता है। इसे सूद-दरसूद या चक्रवृद्धि सूद (व्याज) कहते हैं।

यथा—६२५ रु० का ३ वर्ष में सैकड़े २५ रु० वार्षिक सूद की दर से चक्रवृद्धि व्याज निकालना है, जब कि सूद प्रतिवर्ष जोड़ा जाता है।

∴ १०० रु० का १ वर्ष में २५ रु० सूद होता है।

∴ १ रु० " " " $\frac{२५}{१००}$ रु० " होगा।

मिश्रधन के $\frac{1}{100}$ = उस मूलधन के $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = 1\%$
 के $\times (\frac{1}{100})^2$ । इस तरह ३ वर्ष के बाद किसी मूल
 मिश्रधन = उस मूलधन के $(\frac{1}{100})^3$ इसी तरह से
 समझना चाहिये ।

∴ २०० रु० का ५ वर्ष में मिश्रधन जानने के लिये हम २००
 $(100)^5$ से गुणाकर गुणनफल को $(100)^5$ से भाग देंगे।

$$\therefore \frac{200 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100}{10000000000} = \frac{2 \times 100}{100000}$$

= २२०००८२२२२२२२ = ५ वर्ष में मिश्रधन ।

प्रश्नान्तर—

- (२) ७५० रु० का ३ वर्ष में ३३ रु० सैकड़ा व्याज की दर से जो
 लगाकर मिश्रधन बताओ ।
- (३) ४०० रु० पर ५ वर्ष में ३ रु० सैकड़ा व्याज की दर से जो धन
 और साधारण व्याज हो उनका अंतर बताओ ।
- (४) कितना धन चक्रवृद्धि पर ४ पौ० सैकड़े व्याज की दर से २ वर्ष
 २३० पौ० ८ शि० मिश्रधन हो जाय ।
- (५) ४ रु० सैकड़ा व्याज की दर से २ वर्ष में किसी धन पर जो धन
 और साधारण व्याज मिलते हैं । उनका अंतर १ रु० है तो वह धन
 सा धन है ।

मिश्रान्तरे करणसूत्रम् ।

अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला व्यतीतकालक्षफलोद्भृतास्ते ।
 स्वयोगमक्ताश्च विमिश्रनिष्ठाः प्रयुक्तखण्डानि पृथग् भवन्ति ॥१॥

अथ प्रमाणैः (प्रमाणधनैः) गुणिताः स्वकालाः व्यतीतकालक्षफलोद्भृताः
 ते विमिश्रनिष्ठा स्वयोगमक्ता पृथक् प्रयुक्तखण्डानि भवन्ति ॥

मिश्रधन के $\frac{1003}{1000}$ = उस मूलधन के $\frac{1003}{1000} \times \frac{1003}{1000}$ = उस मूलधन के $\times \left(\frac{1003}{1000}\right)^2$ । इस तरह ३ वर्ष के बाद किसी मूलधन का मिश्रधन = उस मूलधन के $\left(\frac{1003}{1000}\right)^3$ इसी तरह आगे भी समझना चाहिये ।

∴ ३०० रु० का ५ वर्ष में मिश्रधन जानने के लिये हम ३०० रु० को $(100)^4$ से गुणाकर गुणनफल को $(100)^4$ से भाग देते हैं ।

$$\therefore \frac{300 \times 100^3 \times 100^3 \times 100^3 \times 100^3 \times 100^3}{(100)^4} = \frac{3 \times 100^3}{(100)^4}$$

$$= ३७००७८२२२२२९ = ५ वर्ष में मिश्रधन ।$$

प्रश्नान्तर—

- (२) ७५० रु० का ३ वर्ष में $४\frac{१}{२}$ रु० सैकड़ा व्याज की दर से चक्रवृद्धि लगाकर मिश्रधन बताओ ।
- (३) ४०० रु० पर ५ वर्ष में ३ रु० सैकड़ा व्याज की दर से जो चक्रवृद्धि और साधारण व्याज हो उनका अंतर बताओ ।
- (४) कितना धन चक्रवृद्धि पर ४ पौ० सैकड़े व्याज की दर से २ वर्ष में २७० पौ० ८ शि० मिश्रधन हो जाय ।
- (५) ४ रु० सैकड़ा व्याज की दर से २ वर्ष में किसी धन पर जो चक्रवृद्धि और साधारण व्याज मिलते हैं । उनका अंतर १ रु० है तो वह कौन सा धन है ।

मिश्रान्तरे करणसूत्रम् ।

अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला व्यतीतकालघ्नफलोद्भूतास्ते ।

स्वयोगभक्ताश्च विमिश्रनिष्ठाः प्रयुक्तखण्डानि पृथग् भवन्ति ॥१२॥

अथ प्रमाणैः (प्रमाणधनैः) गुणिताः स्वकालाः व्यतीतकालघ्नफलोद्भूताः ते विमिश्रनिष्ठा स्वयोगभक्ता पृथक् प्रयुक्तखण्डानि भवन्ति ॥

अपने-अपने प्रमाण धनों से गुणे हुये अपने-अपने कालों को व्यतीत कालों से गुणे हुये फलों से भाग दें । उनको मिश्रकाल से गुणाकर अपने योग से भाग देने पर अलग-अलग प्रयुक्त के (सूद पर दिये हुये धन का) दुफों हो जायेंगे ॥ १ ॥

उदाहरण—प्रश्न का न्यास मूल में स्पष्ट है। यहाँ सूत्र के अनुसार अपने-अपने प्रमाण धन को अपने-अपने प्रमाण काल से गुणा कर अपने-अपने व्यतीत काल से गुणे हुये अपने-अपने प्रमाण फल से भाग देने पर क्रम से—

$$\frac{1 \times 100}{6 \times 4} = \frac{25}{6} \quad | \quad \frac{1 \times 100}{3 \times 4} = \frac{25}{3} \quad | \quad \frac{1 \times 100}{2 \times 4} = \frac{25}{2} \text{ हुये ।}$$

अब इनको मिश्रधन ९४ से गुणा कर इन $(\frac{25}{6} + \frac{25}{3} + \frac{25}{2})$ के योग $\frac{235}{6}$ से भाग देने पर क्रम से खण्ड संख्याएँ हुईं ।

$$\text{यथा—प्रथम खण्ड} = \frac{25}{6} \times \frac{6 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 24 \text{ निष्क ।}$$

$$\text{द्वितीय खण्ड} = \frac{25}{3} \times \frac{3 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 24 \text{ निष्क ।}$$

$$\text{तृतीय खण्ड} = \frac{25}{2} \times \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 24 \text{ निष्क ।}$$

यहाँ पञ्च राशिक से तीनों टुकड़ों के सूद निकालने पर समान ही होता है ।

$$\text{यथा—प्रथम खण्ड का सूद} = \frac{6 \times 2 \times 2 \times 2}{6 \times 3 \times 2 \times 2} = \frac{6 \times 2}{6 \times 3} = \frac{2}{3} = 2 \frac{2}{3} \text{ निष्क ।}$$

$$\text{द्वितीय खण्ड का सूद} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{3 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{2} = 2 \frac{2}{2} \text{ निष्क ।}$$

$$\text{तृतीय खण्ड का सूद} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \frac{2}{2} \text{ निष्क ।}$$

अथ मिश्रान्तरे करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

प्रक्षेपका मिश्रहता विभक्ताः प्रक्षेपयोगेन पृथक् फलानि ।

प्रक्षेपकों (अपने-अपने मूल धन) को मिश्रधन से अलग-अलग गुणा कर प्रक्षेपकों के योग से सभी को भाग दें, तो अलग-अलग फल (नफा) होते हैं ॥

उपपत्ति :—अत्रालापोक्त्या प्रक्षेपकाः क्रमेण प्र० प्र० चे० । द्वि० प्र० चे० । तृ० प्र० चे० । एषां योगः = प्र० चे० यो० । ततोऽनुपातेन प्र० फ =

$$\frac{\text{प्र. प्र. चे.} \times \text{मि. ध.}}{\text{प्र. चे. यो.}} \quad | \quad \text{द्वि० फ} = \frac{\text{द्वि. प्र. चे.} \times \text{मि. ध.}}{\text{प्र. चे. यो.}} \quad |$$

$$\text{एवं तृ० फ} = \frac{\text{तृ. प्र. चे.} \times \text{मि. ध.}}{\text{प्र. चे. यो.}} \quad | \text{अत उपपन्नम् ।}$$

अत्रोद्देशकः ।

पञ्चाशदेकसहिता गणकाष्टपष्टिः पञ्चोनिता नवतिरादिधनानि तेषाम् ।

प्राप्ता विमिश्रितधनैस्त्रिंशती त्रिभिस्तैर्वाणिज्यतो वद विभज्य धनानि तेषाम् ?

हे गणक ? जिन तीन बनियों के पास क्रम से ५१, ६८ और ८२ मूल धन थे, उन तीनों ने अपने-अपने मूल धन को इकट्ठा (साझा) कर व्यापार

उत्तर— ∴ राम की ५०० की पूँजी १२ महीने तक रही अर्थात् राम की (५०० × १२ =) ६००० की पूँजी १ महीना तक रही। इसी तरह श्याम की (३०० × १० =) ३००० की पूँजी १ महीना तक रही। एवं हरी की (४०० × ७ =) २८०० की पूँजी १ महीना तक रही, और यदु की (७०० × ३ =) २१०० की पूँजी १ महीना तक रही, अतः लाभ के रूपये ८००, ६०००, ३०००, २८०० और २१०० के समानुपाती भागों में बाँटे जायँगे।

$$\therefore ६००० + ३००० + २८०० + २१०० = १३९०० ।$$

∴ १३९०० रु० में राम का ६००० रु० हैं।

∴ ८०० रु० में राम का $\frac{६००० \times ६०००}{१३९०००}$ रु० होंगे।

$$\therefore \frac{६००० \times ६०००}{१३९०००} = \frac{६ \times ६०००}{१३९} = \frac{४ \times ६०००}{१३९} \text{ रु० ।}$$

$$\text{इसी तरह श्याम का नफा} = \frac{६०० \times ३०००}{१३९०००} = \frac{६ \times ३०००}{१३९} = \frac{३ \times ६०००}{१३९} ।$$

$$\text{हरी का नफा} = \frac{६०० \times २८००}{१३९०००} = \frac{६ \times २८००}{१३९} = \frac{२२ \times ६००}{१३९} \text{ रु० ।}$$

$$\text{यदु का नफा} = \frac{६०० \times २१००}{१३९०००} = \frac{६ \times २१००}{१३९} = \frac{१६ \times ६००}{१३९} \text{ रु० ।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्नाः—

- (१) मोहन, सोहन और राघव ने क्रम से ८०० रु० ६७५ रु० और ५२५ रु० व्यापार में लगाये। कुल धन पर ८२५ रु० नफा हुआ तो प्रत्येक को कितने-कितने मिले।
- (२) क, ख, ग और घ चारों ने मिलकर ८०० रु० किसी व्यापार में लगाया। वर्ष के अन्त में उनको क्रम से २३५, १००, १४५ और १२० रु० मिले, तो प्रत्येक की पूँजी बताओ।
- (३) किसी व्यापार में क और ख क्रम से ८४५ पौ० और ६५५ पौ० लगाकर आरम्भ किये, ३ मास के बाद ग १२२५ पौ० देकर सामिल हो गया। १ वर्ष में १२०० पौ० लाभ हुआ तो तीनों के कितने कितने लाभ हुए।
- (४) क, ख और ग अपने-अपने बैलों को चराते हैं। क के १५ बैल ८ महीनों तक, ख के २० बैल ७ महीनों तक और ग के १२ बैल ९ महीनों तक चरे। यदि कुल चराई में ४६ रु० खर्च हो, तो तीनों को कितना-कितना देना पड़ेगा।

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ । इससे 1 में भाग देने पर $\frac{1}{10}$ हुआ । \therefore चारों का पूरण काल = $\frac{1}{10}$ दिन उत्तर ।

प्रश्नान्तर—

(1) किसी हौज में तीन नल हैं । पहला उसे 4 घण्टे में और दूसरा 8 घण्टे में भरता है और तीसरा नल भरे हुए हौज को 2 घण्टे में खाली करता है, तो तीनों एक साथ खोल देने पर भरे हुए हौज को कितने समय में खाली करेगा ।

उत्तर— \therefore पहला नल 4 घण्टे में हौज को भरता है

\therefore " " 8 घण्टे में हौज का $\frac{1}{2}$ भरेगा ।

\therefore दूसरा नल 8 घण्टे में हौज को भरता है

\therefore " " 8 घण्टे में हौज का $\frac{1}{2}$ भरेगा ।

\therefore 3 नल 2 घण्टे में हौज को खाली करता है

\therefore " " 4 घण्टे में हौज का $\frac{1}{2}$ खाली करेगा ।

\therefore तीनों मिलकर 1 घण्टे में $\frac{1}{4} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ हौज को खाली करेगा । परन्तु $\frac{1}{4} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1-2}{4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$ । \therefore $\frac{1}{4}$ को 1 घण्टे में खाली करता है ।

\therefore समूचे हौज को $\frac{1}{4} = 20$ घण्टे में खाली करेगा ।

(12) किसी तालाब को 3 नल क्रम से 2, 3 और 4 घण्टे में भरते हैं और चौथा नल 4 घण्टे में खाली करता है । यदि चारों नल एक ही बार खोल दें, तो तालाब को कितने समय में भर देंगे ।

उत्तर—यहाँ पहले के अनुसार 1 घण्टे में हौज का भरने वाला भाग एवं खाली होने वाला भाग निम्नलिखित हैं— $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ हुये । \therefore चारों मिलकर 1 घण्टा में खाली करेंगे = $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3+2+3-3}{12} = \frac{5}{12}$ ।

\therefore चारों मिलकर समूचे तालाब को $\frac{12}{5}$ घण्टे में भरेंगे = $2\frac{4}{5}$ घण्टा ।

अथ क्रयविक्रये करणसूत्रं वृत्तम् ।

पर्ययैः स्वमूल्यानि भजेन् स्वभागहत्वा तदैक्येन भजेच्च तानि ।

भागान्श्च मिश्रेण घनेन हत्वा मूल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ॥

अथ सूत्र के अनुसार अपने-अपने मूल्य को अपने-अपने भाग से गुणा कर अपने-अपने पण्य से भाग देने पर $\frac{1 \times 3 \times 3}{6} = \frac{3}{2}$ और $\frac{1 \times 1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ हुये ।

इनका योग $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ । अथ $\frac{3}{2}$ और $\frac{1}{2}$ को अलग-अलग मिश्रधन $\frac{1 \times 3}{2}$ से गुणा कर $\frac{3}{2}$ से भाग देने पर $\frac{3 \times 1 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{4} =$ तण्डुल मौल्य और $\frac{1 \times 1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16} =$ सुद्र मौल्य हुये ।

अथ अपने-अपने भाग को $\frac{1 \times 3}{2}$ से गुणा कर $\frac{3}{2}$ से भाग देने पर तण्डुल परिमाण $= \frac{3 \times 1 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{4}$ और सुद्रपरिमाण $= \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16}$ हुये । चावल का मूल्य $= \frac{1}{4}$ द्रम्म $= \frac{1 \times 1}{4} =$ पण $= 2$ पण । शेष ४ को ४ से गुणा किया तो १६ हुआ, इसको ६ से भाग देकर लब्धि २ काकिणी । शेष ४ को २० से गुणा कर ६ से भाग देने पर $1 \frac{2}{3}$ वराटक । इसी प्रकार सुद्र के मूल्य $= 2$ काकिणी और $6 \frac{2}{3}$ वराटक हुये ।

उदाहरणम् ।

कर्पूरस्य वरस्य निष्कयुगलेनैकं पलं प्राप्यते

वैश्यानन्दन ! चन्दनस्य च पलं द्रम्माष्टभागेन चेत् ।

अष्टांशेन तथाऽगुरोः पलदलं निष्केण मे देहि तान्

भागैरेककपोडशाष्टकमितैर्धूपं चिकीर्षाम्यहम् ॥ २ ॥

हे वैश्यानन्दन ! २ निष्क में उत्तम कर्पूर का १ पल मिलता है और $\frac{1}{2}$ द्रम्म में चन्दन का १ पल मिलता है तथा $\frac{1}{2}$ द्रम्म में अगुरु $\frac{1}{2}$ पल मिलता है, तो १ निष्क में उनका क्रम से १, १६ और ८ भाग दो । मैं उनका धूप बनाना चाहता हूँ ।

न्यासः । पण्यानि ३ । ३ । ३ । मौल्यानि ३३ । $\frac{1}{2}$ । $\frac{1}{2}$ । भागाः ३ । ३३ । ६ । मिश्रधनं द्रम्माः १६ । लब्धानि कर्पूरादीनां मूल्यानि १४३ । ६ । ६ । तथैव तेषां पण्यानि ३ । ७३ । ३३ ।

उदाहरण—इसकी क्रिया पहले की तरह होती है जो मूल में स्पष्ट है ।

रत्नमिश्रे करणसूत्रं वृत्तम् ।

नरन्नदानोनितरत्नशेषैरिष्टे हते स्युः खलु मौल्यसंख्याः ।

शेषैर्हते शेषवधे पृथक्स्यैरभिन्नमूल्यान्यथ वा भवन्ति ॥१५॥

उदाहरण—यहाँ नरसंख्या ४ और दानसंख्या १ है अतः इनका घात $४ \times १ = ४$ को रत्न की संख्या (८१०१००१५) में घटाने से मा० ४ नी० ६ मु० ९६ और वज्र १ हुये । इन चारों के लघुतमापवर्त्य ९६ होते हैं अतः ९६ इष्ट मान कर उसमें रत्नशेष से अलग-अलग भाग देने पर रत्नों के मूल्य होंगे । जैसे $९६ \div ४ = २४$ माणिक्य १ का मूल्य । $९६ \div ६ = १६ = १$ नीलम मू० । $९६ \div ९६ = १$ मोती का मू० । $९६ \div १ = ९६$ वज्र १ का मूल्य । दूसरे इष्ट पर से भिन्नात्मक मूल्य होंगे ।

अथवा—शेषोंके घात = $४ \times ६ \times ९६ \times १ = ९६ \times २४$ । इसमें अलग-अलग शेषों से भाग देने पर— $\frac{९६ \times २४}{४} = ५७६$ माणिक्य का मूल्य, $\frac{९६ \times २४}{६} = ३८४$ नीलम का मूल्य, $\frac{९६ \times २४}{९६} = २४$ मोती का मूल्य और $\frac{९६ \times २४}{१} = २३०४$ वज्र का मूल्य हुआ । इन पर से तुल्यधन = २३३ वा ५५९२ होता है । समधन की क्रिया नीचे स्पष्ट है ।

प्रथम वणिक् के पास ५ मा० १ नी० १ मु० १ व०

∴ इनके मूल्य = $१२० + १६ + १ + ९६ = २३३$ ।

द्वितीय वणिक् के धन ७ नी० १ मा० १ मु० १ व०

∴ इनके मूल्य = $११२ + २४ + १ + ९६ = २३३$ ।

तृतीय वणिक् के धन ९० मु० १ मा० १ नी० १ व०

∴ इनके मूल्य = $९७ + २४ + १६ + ९६ = २३३$ ।

चतुर्थ वणिक् के धन २ व० १ मा० १ नी० १ मु०

∴ इनके मूल्य = $१९२ + २४ + १६ + १ = २३३$ ।

इसी प्रकार दूसरा समधन भी लाना चाहिये ।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) क के पास ६० गाय, ख के पास ३२ बैल और ग के पास २८ घोड़े हैं ।

इन्होंने अपने-अपने पास से तीन-तीन जानवर आपस में दूसरों को दे दिये, तो सब के पास समान धन हो गये अतः प्रत्येक जानवर का मूल्य बताओ ।

(२) १ के ३५ आम के पेड़ और २ के ८५ लीची के पेड़ थे । आपस में दोनों ने ५ पेड़ दूसरों को दिये, तो दोनों की सम्पत्ति तुल्य हो गयी, अतः पेड़ों के मूल्य बताओ ।

$$\frac{\text{प्र. व.} \times \text{प्र. सु. मा.}}{\text{स. मा.}} + \frac{\text{द्वि. व.} \times \text{द्वि. सु. मा.}}{\text{स. मा.}} = \frac{\text{यो.}}{\text{स. मा.}} \text{ सुवर्णद्वययोगमूल्यम् ।}$$

ततो यदि सर्वसुवर्णयोगेनेदं योगमूल्यं तदा 'स. मा.' नितेन किमिति जातं

$$\text{कनकैक्यवर्णः—} \frac{\text{यो.} \times \text{स. मा.}}{\text{सु. यो.} \times \text{स. मा.}} = \frac{\text{यो.}}{\text{सु. यो.}} \text{ । यदि सुवर्णयोगे शोधिते}$$

सति न्यूनत्वं तदाऽनुपातः—यदि शोधितसुवर्णेन $\frac{\text{यो.}}{\text{स. मा.}}$ मितं मूल्यं लभ्यते

तदा 'स. मा.'मितेन किमिति जातं स्वर्णैक्यवर्णमानम्—

$$\frac{\text{यो.} \times \text{स. मा.}}{\text{शो. हे.} \times \text{स. मा.}} = \frac{\text{यो.}}{\text{शो. हे.}} \text{ । वा शो. हे.} = \frac{\text{यो.}}{\text{दे. व.}} \text{ । अत उपपन्नम् ।}$$

उदाहरणानि ।

विश्वार्करुद्रदशवर्णसुवर्णमाया

द्विग्वेदलोचनयुगप्रमिताः क्रमेण ।

आवर्तितेषु वद् तेषु सुवर्णवर्ण-

स्तूर्णं सुवर्णगणितञ्च ! वणिक् ! भवेत् कः ॥ १ ॥

ते शोधनेन यदि विशतिरुक्तमायाः

स्युः षोडशाशु वद् वर्णमितिस्तदा का ? ।

चेच्छोधितं भवति षोडशवर्णहेम

ते विशतिः कति भवन्ति तदा तु मायाः ? ॥ २ ॥

हे सुवर्णगणितञ्च वणिक् ! १३, १२, ११ और १० वर्ण के सोने की क्रम से १०, ४, २ और ४ माया हैं, ता उनको एक साथ मिला देने पर सोने का वर्ण क्या होगा । यदि उक्त २० माया सोना शोधन करने पर १६ माया हो जाय, तो उसका वर्णमान क्या होगा । यदि उक्त सुवर्ण को मिलाने पर वह १६ वर्ण का हो जाय, तो २० माया घटकर कितना हो जायगा ।

न्यासः । $\frac{१३}{१०} \frac{१२}{४} \frac{११}{२} \frac{१०}{४}$ ।

जाताऽऽवर्तितसुवर्णवर्णमितिः १२ । एत एव यदि शोधिताः सन्तः षोडश माया भवन्ति, तदा वर्णाः १५ । यदि ते च षोडश वर्णास्तदा पञ्चदश माया भवन्ति १५ ।

हे मित्र ! १० और ११ वर्ग का सोना क्रम से ८ और २ नापे हैं । तथा अज्ञातवर्ग का सोना ६ नापा है । उन सोने को मिलाने पर यदि वह १२ वर्ग वाला सोना हो जाता है, तो अज्ञात वर्ग का मान कृहो ।

न्यासः । $\frac{१०}{६} \frac{११}{६}$ । लघ्वनज्ञातवर्णमानम् १५ ।

श्राहरण—वर्ग = १०, ११, ० । नापा = ८, २, ६ । युतिज्ञातवर्ग = १२ ।
अव सूत्र के अनुसार— $१२ \times (८ + २ + ६) = १२ \times १६ = १९२$ । अव—
 $१९२ - (१० \times ८ + ११ \times २) = १९२ - (८० + २२) = १९२ - १०२ = ९०$ ।
 $९० \div ६ = १५ =$ अज्ञात वर्ग का मान ।

सुवर्णज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम् ।

व्यर्णैक्यनिश्चो युतिज्ञातवर्णः स्वर्णवर्णैक्यवियोजितश्च ।

अहेमवर्णाग्निजयोगवर्णविश्लेषभक्तोऽविदिताग्निजं स्यात् ॥१८॥

युतिज्ञातवर्गः स्वर्णैक्यनिश्चः स्वर्णवर्णैक्यवियोजितश्च कार्यः । तेषु अहेम-
वर्णाग्निजयोगवर्णविरलेषेण भक्तस्तदाऽविदिताग्निजं स्यात् ।

युतिज्ञातवर्ग को मोने के योग से गुना कर उसमें सुवर्ग और अग्ने-अग्ने
वर्ग के घातों के योग को बटावें । शेष में अज्ञात सोने के वर्ग की संख्या और
युति वर्ग के अन्तर से भाग दें, तो अज्ञात मोने का मान हो जायगा ।

उपपत्तिः—अज्ञातसुवर्गमानं = य । तदा 'सुवर्णवर्णाहृतियोगराशा'-
विन्यादिसूत्रेण—

युतिवर्णः = यु० व० = प्र० सु० × प्र० व० + द्वि० सु० × द्वि० व० + य० × तृ० व०
प्र० सु० + द्वि० सु० + य

∴ यु० व० (प्र० सु० + द्वि० सु० + य) = प्र० सु० × प्र० व० + द्वि० सु० × द्वि०
व० × य० तृ० व० ।

∴ यु० व० (प्र० सु० + द्वि० सु०) + यु० व० × य० = प्र० सु० × प्र० व० + द्वि० सु० ×
द्वि० व० × य० तृ० व० ।

= यु० व० (प्र० सु० + द्वि० सु०) - (प्र० सु० × प्र० व० + द्वि० सु० × द्वि० व०) =
य० × तृ० व० - य० × यु० व० ।

= यु० व० (प्र सु० + द्वि० सु०) - (प्र सु० + प्र व० + द्वि सु० × द्वि व०) =
य (तृ व० - यु व०)

$$\begin{aligned} \therefore \text{सा.व (य + क)} &= \text{अ} \times \text{य} + \text{उ} \times \text{क} = \text{सा.व} \times \text{य} + \text{सा.व} \times \text{क} । \\ \therefore \text{सा.व} \times \text{क} - \text{उ} \times \text{क} &= \text{अ} \times \text{य} - \text{सा.व} \times \text{य} \\ &= \text{क (सा.व - उ)} = \text{य (अ - सा.व)} \\ \therefore \text{य} &= \frac{\text{क (सा.व - उ)}}{\text{अ - सा.व}} । \end{aligned}$$

अत्र 'त्रैपाभावोऽथवायत्रे'त्यादिकुट्टकोक्त्या गुणलब्धी क्रमेण $\frac{\text{गु} = ००}{\text{उ} = ००}$

तत 'दृष्टाहतः स्वस्वहरेण युक्ते' इत्यादिना य, क माने क्रमेण $\text{य} = \text{इ (सा.व - उ)}$ । $\text{क} = \text{इ (अ - सा.व)}$ अत उपपन्नम् ।
उदाहरणम् ।

हाटकगुटिके षोडशदशवर्णं तद्युतो सखे जातम् ।

द्वादशवर्णसुवर्णं त्रूहि तयोः स्वर्णमाने मे ? ॥ १ ॥

हे मित्र ! १६ और १० वर्ण वाले सोने की २ गुटिका को मिलाने से यदि १२ वर्ण का सोना हो जाता है, तो दोनों सोने का मान मुझे बताओ ।

न्यासः । $\frac{१६}{०} - \frac{१०}{०}$ । साध्यो वर्णः १२ । कल्पितमिष्टम् १ । लब्धे सुवर्णमाने $\frac{१६}{१} - \frac{१०}{१}$ ।

अथवा द्विकेनेष्टेन $\frac{१६}{१} - \frac{१०}{१}$ । अर्धगुणितेन वा $\frac{१६}{१} - \frac{१०}{१}$ । एवं बहुधा ।

उदाहरण—यहाँ वर्ण १६, १० साध्यवर्ण = १२, इष्ट = १ । अब सूत्र के अनुसार अनल्पवर्ण—साध्यवर्ण = १६ - १२ = ४ । साध्यवर्ण - अल्पवर्ण = १२ - १० = २ । अब इष्ट १ से दोनों शेषों को गुणा करने से $४ \times १ = ४$ अल्पवर्ण और $२ \times १ = २$ अनल्प वर्ण हुये ।

अथ छन्दश्चित्यादौ करणसूत्रं श्लोकत्रयम् ।

एकाद्येकोत्तरा अङ्गा व्यस्ता भाज्याः क्रमस्थितैः ।

परः पूर्वण संगुण्यस्तत्परस्तेन तेन च ॥ २० ॥

एकद्वित्र्यादिभेदाः स्युरिदं साधारणं स्मृतम् ।

छन्दश्चित्युत्तरे छन्दस्युपयोगोऽस्य तद्विदाम् ॥ २१ ॥

मूपावहनभेदादौ खण्डमेरौ च शिल्पके ।

वैद्यके रसभेदीये तन्नोक्तं विस्तृतेर्भयात् ॥ २२ ॥

लब्धा एकादिसंयोगेन पृथग्व्यक्तयः ६, १५, २०, १४, ६, १ ।
एनासामैक्यम् सर्वभेदाः ६३ ।

इति मिश्रकव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार $\left. \begin{array}{l} १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ \\ १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ \end{array} \right\}$ पेंसा न्यास
कर सूत्र के अनुसार प्रथम भेद $\frac{१}{१} = ८$ । द्वि० भे० = $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = २८$ । तृ० भे०
 $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = २ \times ७ \times २ = २८$ । च० भे० = $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = १४ \times ५ = ७०$ ।
पंच० भे० = $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = २८$ । इसी तरह छटा भेद = २८, ७वाँ भेद =
८, और ८वाँ भेद = १ । सब भेदों का योग = सप्ता वहन भेद = २५५ । दूसरे
उदाहरण में भी पूर्वोक्त रीति से १ से ६ तक निकालने पर क्रम से एकादि
रसों की व्यक्ति संख्या ६, १५, २०, १४, ६, १ । इनका योग = ६३ = सर्वभेद ।

इति मिश्रकव्यवहारः समाप्तः ।

अथ श्रेढीव्यवहारः ।

तत्र सङ्कलितैक्ये करणसूत्रं वृत्तम् ।

मैकपदन्नपदार्थमथैकाद्यङ्कयुतिः किल सङ्कलितास्या ।

सा द्वियुतेन पदेन विनिर्ज्ञा स्यान्निहता खलु सङ्कलितैक्यम् ॥१॥

मैकपदन्नपदार्थ एकाद्यङ्कयुतिः सङ्कलितास्या स्यात् । सा द्वियुतेन पदेन
विनिर्ज्ञा निहता तदा सङ्कलितैक्यं भवति ।

एक से जितनी संख्या तक का योग करना हो, उस अन्तिम संख्या को
पद कहते हैं । पद में १ जोड़कर योगफल को पद के आधे से गुणा करें तो
एक आदि अङ्कों का योग होता है । उस योग को सङ्कलित कहते हैं । उस
सङ्कलित को द्वियुत पद से गुणा कर ३ से भाग दें, तो एक आदि अङ्कों के
सङ्कलित का योग होता है ।

उपपत्तिः—सङ्कलितम् = सं० = $१ + २ + ३ + ४ + ५ + \dots + n$
तथा सं० = $n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1$

अनयोयोगः—

२ सं० = $(n+1) + (n+1) + (n+1) \dots (n+1)$ n पर्यन्तम् ।

$\therefore २$ सं० = $n(n+1)$

\therefore सं० = $n \left(\frac{n+1}{२} \right)$ अत उपपन्नं पूर्वाधिकम् ।

नद्या एकादिसप्तसंयोगेन पृथग्व्यत्यः ६, १४, २०, १४, ६, १ :
 एतासामैक्यम् सर्वमेदाः ६३ ।

इति निम्नकव्यवहारः समानः ।

उदाहरण—अक्ष के अनुसार $\left. \begin{matrix} ०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ \\ १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ \end{matrix} \right\}$ रेखा व्यत्य

अक्ष सूत्र के अनुसार प्रथम मेद $\frac{१}{१} = १$ । द्वि० मे० = $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = १$ । तृ० मे० = $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = १$ । च० मे० = $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = १$ । पंच० मे० = $\frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{१}{१} = १$ । इसी तरह इत्या मेद = १, षष्ठी मेद = १, और ८वाँ मेद = १ । सब मेदों का योग = न्या वहन मेद = १५ । इसी उदाहरण में जो पूर्वोक्त रीति से १ से ६ तक निकालने पर हम से एकादि रत्नों की व्यक्ति संख्या ६, १५, २०, १५, ६, १ । इत्यद्य योग = ६३ = सर्वमेद ।

इति निम्नकव्यवहारः समानः ।

अथ श्रेढीव्यवहारः ।

तत्र सङ्कलितैक्ये अणुसूत्रं ब्रुचम् ।

नैक्यपदसप्तपदाद्यैक्याद्यङ्गयुतिः किल सङ्कलिताख्या ।

सा द्वियुतेन पदेन विनिर्ना स्यात् त्रिहता खलु सङ्कलितैक्यम् ॥१॥

सैक्यपदसप्तपदाद्यैक्याद्यङ्गयुतिः सङ्कलिताख्या स्यात् । सा द्वियुतेन पदेन विनिर्ना त्रिहता तदा सङ्कलितैक्यं भवति ।

एक से चित्रनी संख्या तक का योग करना हो, उस जतिम संख्या के पद कहते हैं । पद से १ जोड़कर योगफल को पद के भावे से गुणा करें तो एक आदि अङ्कों का योग होगा है । उस योग को सङ्कलित कहते हैं । उस सङ्कलित को द्वियुत पद से गुणा कर ३ से भाग दें, तो एक आदि अङ्कों के सङ्कलित का योग होगा है ।

उपपत्ति—सङ्कलितम् = सं० = १ + २ + ३ + ४ + ५ + + n
 तथा सं० = n + (n - १) + (n - २) + (n - ३) + + १

अनयोर्थताः—

२ सं० = (n + १) + (n + १) + (n + १) + (n + १) न पर्यन्तम् ।
 ∴ २ सं० = n (n + १)
 ∴ सं० = n $\left(\frac{n + १}{२} \right)$ अथ उपनहन पूर्वोर्थम् ।

$$\text{यदि } n = ३ \text{ तदा सं० ऐ०} = \frac{३^३ + ३ \cdot ३^२ + २ \cdot ३}{६} = १० \text{ एवमग्रेऽपि—}$$

$$\therefore \text{सर्वेषां योगः} = १ + ४ + १० + \dots$$

$$= \frac{(१^३ + २^३ + ३^३ + \dots)}{६} + \frac{(३ \cdot १^२ + ३ \cdot २^२ + ३ \cdot ३^२ \dots)}{६} + २ \frac{(१ + २ + ३ + \dots)}{६}$$

$$= \frac{\text{घनयोग} + ३ \times \text{वर्गयोग} + २ \text{ सं०}}{६}$$

$$\therefore \text{सं० ऐ० योः} = \frac{\text{घनयोग} + ३ \cdot \text{वर्गयोग} + २ \text{ सं०}}{६}$$

$$\text{परञ्च द्विगुणपदं कुयुतमिथादिसूत्रेण—व०यो०} = \frac{(२n + १) \text{ सं०}}{३}$$

$$\text{तथा घनयोग} = (\text{सं०})^३$$

$$\therefore \text{सं० ऐ० यो०} = \frac{(\text{सं०})^३ + ३ \frac{(२n + १) \text{ सं०}}{३} + २ \text{ सं०}}{६}$$

$$= \frac{(\text{सं०})^३ + (२n + १) \text{ सं०} + २ \text{ सं०}}{६} = \frac{\text{सं०} \{ \text{सं०} + (२n + १) + २ \}}{६}$$

$$= \frac{\text{सं०} \{ \text{सं०} + २n + ३ \}}{६} = \frac{\text{सं०}}{६} = \left\{ \frac{n(n + १)}{२} + २n + ३ \right\}$$

$$= \frac{\text{सं०}}{६ \times २} \{ n^२ + n + ४n + ६ \} = \frac{\text{सं०}}{१२} (n^२ + ५n + ६)$$

$$= \frac{\text{सं०}}{१२} \{ n^२ + ३n + २n + ६ \} = \frac{\text{सं०}}{१२} \{ n(n + ३) + २(n + ३) \}$$

$$= \frac{\text{सं०}}{१२} (n + २) (n + ३) = \frac{\text{सं०} (n + २)}{३} \times \frac{(n + ३)}{४}$$

$$= \text{सं० ऐ०} \times \frac{(n + ३)}{४} \text{ अनेन—}$$

‘रामयुक्तपदेनैव निघ्नं संकलितैक्यकम् ।

वेदासं योगमानं स्यात्स्फुटं संकलितैक्यजम् ॥’

इति सूत्रमुपपद्यते ।

अथ सङ्कलितैक्य के सूत्र से—१ का सङ्कलितैक्य

$$= \frac{1 \times (1 + 1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

$$१ से २ तक का सङ्कलितैक्य = \frac{२ \times (२ + १)}{३} = २$$

$$१ से ३ तक का सङ्कलितैक्य = \frac{३ \times (३ + २)}{४} = २ \times ५ = १०$$

इसी तरह बनाने पर १ से ९ तक के अलग-अलग संकलितैक्य क्रम से १, ४, १०, २०, ३५, ५६, ८४, १२०, १६५ होंगे ।

कृत्यादियोगे करणसूत्रं वृत्तम् ।

द्विग्नपदं क्युतं त्रिविभक्तं सङ्कलितेन हतं कृतियोगः ।

सङ्कलितस्य कृतेः सममेकाद्यङ्कवनैक्यमुदीरितमाद्यैः ॥ २ ॥

द्विग्नपदं क्युतं त्रिविभक्तं सङ्कलितेन हतं (तदा) कृतियोगः स्यात् ।
सङ्कलितस्य कृतेः समम् एकाद्यङ्कवनैक्यम् आद्यैः उदीरितम् ।

पद को दूना कर १ जोड़कर ३ से भाग दें, लब्धि को सङ्कलित से गुणा करें तो एकादि अङ्कों का वर्गयोग होता है । सङ्कलित के वर्ग के समान एकादि अङ्कों का वनयोग आद्याचार्यों ने कहा है ।

उपपत्तिः— $१^२ + २^२ + ३^२ + ४^२ + \dots + ५^२$ पृथक् योगः
कर्त्तव्योऽस्ति तत्रैकाद्यङ्कानां सङ्कलितम् = $\frac{५(५+१)}{२} = \frac{५^२+५}{२} = \frac{५^२}{२} + \frac{५}{२}$

$$\text{अत्र यदि पद} = १, \text{ तदा } \frac{५^२}{२} + \frac{५}{२} = \frac{१^२}{२} + \frac{१}{२}$$

$$\text{''} = २ \text{ '' } \frac{५^२}{२} + \frac{५}{२} = \frac{२^२}{२} + \frac{२}{२}$$

$$\text{''} = ३ \text{ '' } \frac{५^२}{२} + \frac{५}{२} = \frac{३^२}{२} + \frac{३}{२}$$

सर्वेषां योगः = संकलितैक्यम् =

$$= \frac{१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + ५^२}{२} + \frac{१ + २ + ३ + \dots + ५}{२}$$

$$\begin{aligned}
&= p^2 + (2p + 1)p(p + 1) - 2(p + 1)p + p \\
&= p^2 + (p + 1)(2p^2 + p - 2p)p + p \\
&= p^2 + (p + 1)(2p^2 - p) + p \\
&= p^2 + 2p^3 - p^2 + 2p^2 - p + p \\
&= p^2 + 2p^2 + p^3 = (p^2 + p)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{घ. यो} = \frac{(p^2 + p)^2}{2} = \left\{ \frac{p(p + 1)}{2} \right\}^2$$

अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

तेषामेव च वर्गैक्यं घनैक्यं च वद् द्रुतम् ।

कृतिसङ्कलनामार्गे कुशला यदि तं मतिः ॥ १ ॥

यदि तुम्हारी बुद्धि वर्गों के सङ्कलन मार्ग में कुशल है, तो उन्हीं (एकादि) अङ्कों के वर्गों का योग तथा घनों का योग शीघ्र कहो ।

न्यासः । १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ । वर्गैक्यम् १, ५, १४, ३०, ५५, ८१, ११०, १५४, २०५ । घनैक्यम् १, ८, २७, ६४, १२५, २१६, ३४३, ५१२, ७८४, १०८६, १४७५ ।

उदाहरण—१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ इनका वर्गयोग करना है ।

अथ सूत्र के अनुसार—१ का वर्गयोग = $\frac{1 \times 2 + 1}{2} \times 1 = 1 \times 1 = 1$

१ से २ तक का वर्गयोग = $\frac{2 \times 2 + 1}{2} \times 2 = 4$

१ से ३ तक का वर्गयोग = $\frac{3 \times 2 + 1}{2} \times 3 = 14$

इसी तरह १ से ९ तक सभी अङ्कों के अलग-अलग वर्गयोग क्रम से १, ५, १४, ३०, ५५, ९१, १४०, २०५, २८५ हुये ।

दूसरा उदाहरण—१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ इनका घनयोग करना है, तो सूत्र के अनुसार १ का घनयोग = १ के संकलित का वर्ग = $1^2 = 1$

१ से २ तक का घनयोग = $2^2 = 4$

१ से ३ तक का घनयोग = $3^2 = 9$

उदाहरणम् ।

आधे दिने द्रम्मचतुष्टयं यो दत्त्वा द्विजेभ्योऽनुदिनं प्रवृत्तः ।

दातुं सखे ! पञ्चत्रयेन पक्षे द्रम्मा वद द्राक् कति तेन दत्ताः ? ॥१॥

हे मित्र, किसी दाता ने ब्राह्मणों को पहले दिन ४ द्रम्म देकर प्रतिदिन ५ घड़ाकर देने के लिये प्रवृत्त हुआ, तो १५ दिन में उसने कितना दिया, यह शीघ्र कहो ।

न्यासः । आ. ४ । च. ५ । ग. १५ । अन्त्यधनम् ७४ । मध्यधनम् ३६ । सर्वधनम् ५८५ ।

उदाहरण—आ. ४ । च. ५ । गच्छ १५ ।

सूत्र के अनुसार—(१५ - १) = १४ । १४ × ५ = ७० । ७० ÷ ४ = १७ १/४ = अन्त्यधन । ७४ + ४ = ७८ ÷ २ = ३९ मध्यधन । ३९ × १५ = ५८५ सर्वधन हुआ ।

उदाहरणम् ।

श्रादिः सप्त त्रयः पञ्च गच्छोऽष्टौ यत्र तत्र मे ।

मध्यान्त्यधनसंख्ये के वद सर्वधनं च किम् ? ॥ २ ॥

जहाँ आदि ७, त्रय ५ और गच्छ ८ है, वहाँ अन्त्यधन, मध्यधन और सर्वधन क्या होगा यह कहो ।

न्यासः । आ. ७ । च. ५ । ग. ८ । मध्यधनम् ४२ ।

अन्त्यधनम् ४२ । सर्वधनम् १६६ ।

सप्तदिने गच्छे, मध्यदिनाभावान्मध्यात् प्रागपरदिनवनयोर्योगार्धं मध्यदिनधनं भवितुमर्हतीति प्रतीतिरुत्पाद्या ।

उदाहरण—आदि ७, त्रय ५, गच्छ ८ ।

सूत्र के अनुसार—८ - १ = ७ । ७ × ५ = ३५ । ३५ ÷ ७ = ५ १/२ = अन्त्यधन । ४२ + ७ = ४९ । ४९ / २ = मध्यधन । ४९ / २ × ८ = ४९ × ४ = १९६ सर्वधन ।

मुखज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

गच्छहते गणिते वदनं स्याद्व्येकपदन्नचंपार्धविहीने ।

सर्वधन में गच्छ से भाग देकर, लब्धि में भादि घटाकर, शेष में १ घटे हुये गच्छ के भाधे से भाग देने पर लब्धि चय होता है ।

उपपत्ति:—अत्र कल्प्यते चयः = य,

$$\text{तदा पूर्वयुक्त्या सर्वधनम्} = \{ २ \text{ आ} + (न - १) \text{ य} \} \frac{न}{२}$$

$$\text{तदा } \frac{२ \text{ स. ध.}}{न} = २ \text{ आ} + (न - १) \text{ य}$$

$$\therefore \text{य} (न - १) = \frac{२ \text{ स. ध.}}{न} - २ \text{ आ} = २ \left(\frac{\text{स. ध.}}{न} - \text{आ.} \right)$$

$$\therefore \text{य} = \frac{२ \left(\frac{\text{स. ध.}}{न} - \text{आ.} \right)}{(न - १)} = \frac{\left(\frac{\text{स. ध.}}{न} - \text{आ.} \right)}{\frac{न - १}{२}}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

प्रथममगमदह्ना योजने यो जनेश-

स्तदनु ननु कयाऽसौ ब्रूहि यातोऽध्ववृद्ध्या ।

अरिकरिहरणार्थं योजनानामशीत्या

रिपुनगरसत्रात् सत्ररात्रेण धीमन् ? ॥ १ ॥

हे बुद्धिमन्, कोई राजा पहले दिन दो योजन (८ कोश) चला । उसके बाद वह कितने योजन की वृद्धि से प्रतिदिन चला कि सात रात में ८० योजन पर स्थित शत्रु के हाथी को अपहरण करने के लिए शत्रुनगर में पहुँच गया ?

न्यासः । आ. २ । च. ० । ग. ७ । घ. ८० । लब्धमुत्तरम् ३३ ।
अन्त्यधनम् । १५६ मध्यधनम् १५ ।

उदाहरण—आदि २ । चय ० । गच्छ ७ । सर्वधन ८० ।

अत्र सूत्र के अनुसार— $८० \div ७ = \frac{८०}{७}$ । $\frac{८०}{७} - २ = \frac{८० - १४}{७} = \frac{६६}{७}$ ।

$$\frac{६६}{७} \div \left(\frac{७-१}{१} \right) = \frac{६६}{७} \div \frac{६}{१} = \frac{६६}{७} \times \frac{१}{६} = \frac{११}{७} = \text{चय} ।$$

$$\text{अत्र } ७ - १ = ६ । ६ \times \frac{११}{७} = \frac{१३२}{७} । \frac{१३२}{७} + २ = \frac{१३२ + १४}{७} = \frac{१४६}{७}$$

$$= \text{अ. ध.} / \frac{१ \times ६६}{७} + २ = \frac{१ \times ६६ + १४}{७} = \frac{१६०}{७} । \frac{१६०}{७} = \frac{८०}{७} \text{ मध्यधन ।}$$

$$\frac{c}{a} + 1k - \left(\frac{c}{a} - 1k \right) \sqrt{2a \cdot b \cdot c} =$$

$$\left(\frac{c}{a} - 1k \right) - \left(\frac{c}{a} - 1k \right) \cdot b \times c \cdot \sqrt{2a \cdot b \cdot c} = b \times c \therefore$$

$$\left(\frac{c}{a} - 1k \right) + b \times c = \left(\frac{c}{a} - 1k \right) \sqrt{2a \cdot b \cdot c} \therefore$$

$$\left\{ \left(\frac{c}{a} - 1k \right) + b \times c \right\} = \left(\frac{c}{a} - 1k \right) \sqrt{2a \cdot b \cdot c} \therefore$$

$$\left(\frac{c}{a} - 1k \right) + \left(\frac{c}{a} - 1k \right) b \times c = \left(\frac{c}{a} - 1k \right) \sqrt{2a \cdot b \cdot c} \therefore$$

$$\left(\frac{c}{a} - 1k \right) \{ 1 + b \times c \} = \left(\frac{c}{a} - 1k \right) \sqrt{2a \cdot b \cdot c} \therefore$$

$$1 + b \times c = \sqrt{2a \cdot b \cdot c} \therefore$$

$$\therefore 2a \cdot b \cdot c = 2a \times b \times c + 2a \times b \times c - 2a \times b \times c$$

$$= 2a \cdot b \cdot c + (2a - 2a) \cdot b \cdot c = 2a \cdot b \cdot c + 2a \cdot b \cdot c - 2a \cdot b \cdot c$$

$$\therefore 2a \cdot b \cdot c = \{ 2a + (2a - 2a) \} b \cdot c$$

$$\text{यदि } 2a \cdot b \cdot c = \{ 2a + (2a - 2a) \} b \cdot c$$

$$\text{संपत्ति:—कल्पते यदि: = वा, यय: = वा, यय: = वा।}$$

यदि वा का भाग जोड़ें और योग फल में यय से भाग दें, तो प्राप्त होता है।
 यदि वा का भाग जोड़ें और योग फल में यय से भाग दें, तो प्राप्त होता है।
 यदि वा का भाग जोड़ें और योग फल में यय से भाग दें, तो प्राप्त होता है।
 यदि वा का भाग जोड़ें और योग फल में यय से भाग दें, तो प्राप्त होता है।

श्रीकालदास (सर्वकार) उत्तर लखनऊ (द्विप्रथमविभाग) यय

ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं

ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं

ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं

ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं

ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं

ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं ययं

सर्वधन में गच्छ से भाग देकर, लब्धि में आदि घटाकर, शेष में १ घटे हुये गच्छ के आधे से भाग देने पर लब्धि चय होता है ।

उपपत्ति:—अत्र कल्प्यते चयः = य,

$$\text{तदा पूर्वयुक्त्या सर्वधनम्} = \{ २ \text{ आ} + (न - १) \text{ य} \} \frac{न}{२}$$

$$\text{तदा } \frac{२ \text{ स. ध.}}{न} = २ \text{ आ} + (न - १) \text{ य}$$

$$\therefore \text{य} (न - १) = \frac{२ \text{ स. ध.}}{न} - २ \text{ आ} = २ \left(\frac{\text{स. ध.}}{न} - \text{आ.} \right)$$

$$\therefore \text{य} = \frac{२ \left(\frac{\text{स. ध.}}{न} - \text{आ.} \right)}{(न - १)} = \frac{\left(\frac{\text{स. ध.}}{न} - \text{आ.} \right)}{\frac{न - १}{२}}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

प्रथममगमदहा योजने यो जनेश-

स्तदनु ननु कयाऽसौ ब्रूहि यातोऽध्वबृद्धया ।

अरिकरिहरणार्थं योजनानामशीत्या

रिपुनगरमवाप्तः सप्तरात्रेण धीमन् ? ॥ १ ॥

हे बुद्धिमन्, कोई राजा पहले दिन दो योजन (८ कोश) चला । उसके बाद वह कितने योजन की वृद्धि से प्रतिदिन चला कि सात रात में ८० योजन पर स्थित शत्रु के हाथी को अपहरण करने के लिए शत्रुनगर में पहुँच गया ?

न्यासः । आ. २ । च. ० । ग. ७ । ध. ८० । लब्धमुत्तरम् १३ ।
अन्त्यधनम् । $\frac{१५६}{३}$ मध्यधनम् १५ ।

उदाहरण—आदि २ । चय ० । गच्छ ७ । सर्वधन ८० ।

अब सूत्र के अनुसार— $८० \div ७ = \frac{८०}{७}$ । $\frac{८०}{७} - २ = \frac{६० - १४}{७} = \frac{६६}{७}$ ।

$$\frac{६६}{७} \div \left(\frac{७-१}{२} \right) = \frac{६६}{७} \div \frac{३}{२} = \frac{६६}{७} \times \frac{२}{३} = \frac{२२}{७} = \text{चय} ।$$

$$\text{अब } ७ - १ = ६ । ६ \times \frac{२२}{७} = \frac{१३२}{७} । \frac{१३२}{७} + २ = \frac{१३२ + १४}{७} = \frac{१४६}{७}$$

$$= \text{अ. ध.} / \frac{१४६}{७} + २ = \frac{१४६ + १४}{७} = \frac{१६०}{७} । \frac{१६०}{७} = \frac{८०}{३} \text{ मध्यधन ।}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2 \text{ स. ध. } \times \text{ च. } + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{2} \right)^2} - \text{आ} + \frac{\text{च}}{2}}{\text{च}}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

द्रम्मत्रयं यः प्रथमेऽह्नि दत्त्वा दातुं प्रवृत्तो द्विचयेन तेन ।

शतत्रयं पण्ड्यधिकं द्विजेभ्यो दत्तं कियद्विदियसैर्वदाशु ? ॥ १ ॥

किसी दाता ने ब्राह्मणों को पहले दिन ३ द्रम्म देकर प्रतिदिन २ द्रम्म बढ़ाकर देने के लिये उद्यत हुआ, तो उसने ३६० द्रम्म कितने दिनों में दिया, यह शीघ्र कहो ।

न्यासः । आ. ३ । च. २ । ग. ० । ध. ३६ । अन्त्यधनम् ३७ । मध्यधनम् २० । लब्धो गच्छः १८ ।

उदाहरण—आदि ३ । चय २ । गच्छ ० । सर्वधन ३६० । अथ सूत्र के अनुसार— $३६० \times २ = ७२०$ । $७२० \times २ = १४४०$ । $१४४० + (३ - \frac{३}{२})^2 = १४४० + (३ - १)^2 = १४४० + २^2 = १४४० + ४ = १४४४$ । $\sqrt{१४४४} = ३८$ । $३८ - ३ = ३५$ । $३५ + \frac{३}{२} = ३५ + १ = ३६$ । $३६ \div २ = १८$ गच्छ ।

अथ अन्त्यधन = $(१८ - १) \times २ + ३ = १७ \times २ + ३ = ३४ + ३ = ३७$ । मध्यधन = $\frac{३७ + ३}{२} = \frac{४०}{२} = २०$ ।

अथ द्विगुणोत्तरादिवृद्धौ फलानयने करणसूत्रं सार्धार्या ।

विषमे गच्छे व्येके गुणकः स्थाप्यः समेऽर्धिते वर्गः ।

गच्छक्षयान्तमन्त्याद् व्यस्तं गुणवर्गजं फलं यत् तत् ॥ ६ ॥

व्येकं व्येकगुणोद्घृतमादिगुणं स्याद्गुणोत्तरे गणितम् ।

विषमे गच्छे व्येके गुणकः स्थाप्यः समे (गच्छे) अर्धिते वर्गः (स्थाप्यः) एवं गच्छक्षयान्तं (गुणवर्गौ स्थाप्यौ) । अन्यात् व्यस्तं गुणवर्गजं यत् फलं तत् व्येकं, व्येकगुणोद्घृतं आदिगुणं (तदा) गुणोत्तरे गणितं स्यात् ।

(द्विगुण, त्रिगुण आदि चय वाली श्रेणी में) यदि गच्छ विषम संख्या हो, तो उसमें १ घटाकर गुणक लिखें । यदि गच्छ सम (२, ४, ६ आदि) हो,

उदाहरण—आदि २ । चय २ । गच्छ ३० ।

यहाँ गच्छ ३० है । इसको मन होने के कारण $\frac{30}{2} = 15$ को वर्ग लिखा । फिर 15 विषम है, अतः $(15-1) = 14$ को गुणक लिखा । फिर 14 मन संख्या है, अतः $\frac{14}{2} = 7$ को वर्ग लिखा । फिर 7 में 1 वदाने से 8 हुआ । इसे गुणक लिखा, फिर 8 का आधा 4 को वर्ग लिखा, फिर 4 में

15 वर्ग 105३७४1८२४
14 गुणक ३२७६८
7 वर्ग 4९
4 गुणक 1२८
३ वर्ग ९
२ गुणक ८
1 वर्ग १
० गुणक २

1 वटाकर २ हुआ, इसको गुणक लिखा । फिर २ का आधा 1 को वर्ग लिखा और 1 में 1 वदाने से ० हुआ इसे गुणक लिखा । गुणक की जगह २ लिखकर अन्तिम में ठलठे ऊपर की ओर क्रिया करने पर 105३७४1८२४ हुआ । इसमें 1 वटाया तो 105३७४1८२३ हुआ । इसमें एकौन गुण (२-1) 1 से भाग दिया, तो 105३७४1८२३ हुआ । इसको आदि २ से गुणा किया तो २१०७४८३६४६ बराटक हुये ।

इसको २० से भाग देने पर शेष ६ बराटक । लब्धि 105३७४1८२ काकिणी । इसको ४ से भाग देने पर शेष २ काकिणी । लब्धि २६८३५३५ पग को 1६ से भाग देने पर शेष ९ पग । लब्धि 1६७७७२३ द्रम्म को 1६ से भाग देने पर शेष ९ द्रम्म । लब्धि 1०४८५७ निष्क हुआ ।

इनको क्रम से लिखने पर—सर्वधन = 10४८५७ निष्क, ९ द्रम्म, २ पग, २ काकिणी, ६ बराटक ।

उदाहरणम् ।

आदिद्विकं सखे ! वृद्धिः प्रत्यहं त्रिगुणोत्तरा ।

गच्छः सप्तदिनं यत्र गणितं तत्र किं वद ॥ २ ॥

हे मित्र, जहाँ आदि २, त्रिगुणोत्तर चय और गच्छ ७ दिन हैं, वहाँ सर्वधन क्या होगा वद कहो ।

न्यासः । आ. २ । च. ३ । ग. ७ । लब्धं गणितम् २१८६ ।

उदाहरण—आदि २ । चय ३ । गच्छ ७ ।

. अब सूत्र के अनुसार गुणक और वर्ग स्थापित करने पर निम्नलिखित

पादाक्षरमितगच्छे द्विगुणे चये गुणवर्गजं फलं समवृत्तानां संख्या स्यात् । तद्वर्गः वर्गवर्गश्च कार्यः, तौ स्वस्वपदोनों तदा क्रमेण अर्धसमानां विपमाणां च संख्ये स्याताम् ।

किसी छन्द के एक चरण में जितने अक्षर हों, उनको गच्छ और द्विगुणितोत्तर चय मान कर 'विपमे गच्छे व्येके' इत्यादि प्रकार से जो गुणवर्गज फल हो, वह समवृत्त की संख्या होती है । उस संख्या के वर्ग और वर्ग वर्ग करके दो जगह रख कर दोनों में अपना-अपना मूल घटा देने से क्रम से अर्धसमवृत्त और विपमवृत्त की संख्यायें होती हैं ।

उपपत्तिः—अत्रैकाद्येकोत्तरा अङ्का व्यस्ता भाज्या क्रमस्त्रितैरित्यादिसूत्रेणैकादिगुरुलघुवशेन ये भेदास्तेषां योगो रूपयुतः सर्वभेदयोगो भवति । तत्तुल्या एव समवृत्तभेदास्ते 2^n एतत्तुल्या भवन्त्यत उक्तं 'पादाक्षरेत्यादि समवृत्तानां संख्यान्तम् ।

अथ समवृत्तभेदेषु 2^n मितेषु द्वौ द्वौ भेदौ गृहीत्वाऽङ्कपाशीया ये भेदास्ते-
 ऽर्धसमवृत्तभेदाः = $2^n (2^n - 1) = 2^{2n} - 2^n$ । एवं समवृत्तभेदवर्गतरये
 भेदमाने येऽर्धसमवृत्तभेदास्त एव भास्करीय विपमवृत्तभेदाः = $2^2 (2^n - 1)$
 = $(2^n)^2 - 2^n$ । अत उपपन्नं सर्वम् ।

अत्राचार्येणैकचरणे एकलक्षणं, चरणत्रये तद्विचलक्षणमिति लक्षणद्वयोपेत वृत्तं विपमवृत्तं मत्वा विपमवृत्तभेदाः साधितास्तेन छन्दःशास्त्रोक्त विपमवृत्तभेदास्तद्विज्ञा, विपमवृत्तलक्षणं तु—

'यस्य पादे चतुर्केऽपि लक्ष्म भिन्नं परस्परम् ।

तदाहुर्विपमं वृत्तं छन्दः शास्त्र विशारदाः ॥'

अतस्तद्भेदानयनार्थमुपायः प्रदर्शयते—मिथश्चिह्नभिन्नेषु समवृत्तभेदेषु घनुर-
 श्चतुरो भेदानादायाङ्कपाशीया भेदा ये, त एव वास्तवाविपमवृत्तभेदाः स्युरतस्त-
 द्रूपम्—भे (भे - १) (भे - २) (भे - ३)

$$= \text{भे} (\text{भे}^2 - \text{भे} - २\text{भे} + २) (\text{भे} - ३) \dots$$

$$= \text{भे} (\text{भे}^3 - ३\text{भे}^2 + २\text{भे} - ३\text{भे}^2 + ९\text{भे} - ६)$$

अथ परिशिष्टम्

(१) उस पद समूह को, जिसमें दो लगातार पदों का अन्तर हमेशा समान हो, समान्तर श्रेणी कहते हैं ।

यथा—२, ५, ८, ११.....इत्यादि ।

इसमें दो लगातार पदों के अन्तर ३ होने के कारण यह समान्तर श्रेणी है ।

(२) उदाहरण—१, ३, ५, ७, ९, ११.....इत्यादि न पदों का योग करना है ।

यहाँ आदि = १, चय = २ और गच्छ = न

∴ इन संख्याओं का योग = $\frac{n}{2} \{ २ \text{ आ} + (n-१) \text{ च} \}$

= $\frac{n}{2} \{ २ \times १ + (n-१) \times २ \} = \frac{n}{2} \{ २ + २n-२ \}$

= $\frac{n}{2} \times २n = n^२$

इससे सिद्ध होता है कि एकादि विषम संख्याओं के योग उस पद के वर्ग के बराबर होता है जितने पद उस श्रेणी में रहते हैं ।

(३) उदाहरण—२, ४, ६, ८, १०.....आदि न पदों का योग करना है ।

यहाँ आदि = २, चय = २, गच्छ = न

∴ इनका योग = $\frac{n}{2} \{ २ \text{ आ} + (n-१) \text{ च} \}$

= $\frac{n}{2} \{ २ \times २ + (n-१) \times २ \} = \frac{n}{2} \{ ४ + २n-२ \}$

= $\frac{n}{2} \{ २n+२ \} = \frac{n(n+१) \times २}{२} = n(n+१)$

(४) किसी समान्तर श्रेणी का सङ्कलित १३६ है, तो उसमें कितने पद हैं ।

यहाँ सङ्कलित = १३६, तो सूत्र के अनुसार—

$$\text{पद} = \frac{\sqrt{\text{संकलित} \times ८ + १ - १}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{१३६ \times ८ + १ - १}}{२} = \frac{\sqrt{१०८८ + १ - १}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{१०८९ - १}}{२} = \frac{३३ - १}{२} = \frac{३२}{२} = १६$$

∴ पद = १६ उत्तर ।

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n(n-1)}{2} \left\{ \frac{2n-3}{2} + \frac{2n-5}{2} + \frac{2n-7}{2} + \dots + \frac{2n-2n+1}{2} \right\} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2n-2n+1}{2} \\
 &= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \\
 &= \frac{n(n-1)}{4} \cdot \frac{2n-2n+1}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{8} \text{ उत्तर।}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & 1 + 12 + 123 + 1234 + \dots + (1^2 + 2^2 + \dots + n) \\
 &= (1^3 + 1^2 + 1) + (2^3 + 2^2 + 2) + (3^3 + 3^2 + 3) + \dots + (n^3 + n^2 + n) \\
 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4} + 1 \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{2n^2 + 2n + n^2 + n + 2}{4} \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{3n^2 + 3n + 2}{4} \right) = \frac{n(n+1)}{8} (3n^2 + 3n + 2) \text{ उत्तर।}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) & 1 + 3 + 12 + 30 + \dots + (n^2 - n) \\
 &= (1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 4) + \dots + (n^2 - n) \\
 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{2n+1}{1} - 3 \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{2n+1-6}{1} \right\} = \frac{n(n+1)}{6} \cdot \frac{2n-5}{1} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n-5)}{6} = \frac{n(n+1)}{6} (2n-5) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6} \text{ उत्तर।}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) & 1 + 12 + 123 + 1234 + \dots + (n^2 - n) \\
 &= (1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \dots + (n^2 - n) \\
 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{2n+1}{1} - 3 \right\} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{2n+1-6}{1} \right\} = \frac{n(n+1)}{6} \cdot \frac{2n-5}{1} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} \left\{ n(n+2) - (n+2) \right\} = \frac{n(n+1)}{6} \cdot \frac{n-1}{1} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} \\
 &= n(n+2)(n-1) \text{ उत्तर।}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)(3\frac{2}{3}+n)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+4)}{3} \text{ उत्तर}$$

(१५) किसी समान्तर श्रेणी के दो पद यदि दी हुई दो संख्याओं के बराबर हों, तो उन पदों के अन्तर से दी हुई संख्याओं के अन्तर में भाग दें, तो चय होता है। उसके बाद हम आसानी से आदि निकाल सकते हैं।

उदाहरण—जिस समान्तर श्रेणी का ५ वाँ पद १९ और ८ वाँ पद ३१ है, वह श्रेणी क्याओ ?।

यहाँ पदों का अन्तर = ८ - ५ = ३। और दी हुई संख्याओं का अन्तर = ३१ - १९ = १२।

$$\therefore \text{चय} = १२ \div ३ = ४।$$

यदि कोई पद किसी दी हुई संख्या के बराबर हो, तो १ घटे हुए पद से चय को गुणाकर उस संख्या में घटा दें, तो आदि होता है।

\(\therefore\) यहाँ ५ वाँ पद १९ के समान है।

\(\therefore\) ५ में १ घटाया, तो ४ हुआ। इससे चय ४ को गुणा किया तो १६ हुआ। अब १६ को १९ में घटाया तो १९ - १६ = ३ = आदि।

\(\therefore\) अर्थात् श्रेणी = ३, ७, ११, १५, इत्यादि।

$$\begin{aligned} (१६) \quad & २^२ + ४^२ + ६^२ + ८^२ + १०^२ + \dots \text{पर्यन्त} \\ &= (१^२ \times २^२) + (२^२ \times २^२) + (३^२ \times २^२) + \dots (n^२ \times २^२) \\ &= २^२ (१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + n^२) = ४ \left\{ \frac{n(n+१)}{३} \right\} \frac{n(n+१)}{३} \\ &= \frac{४}{३} n (n+१) (२n+१) \text{ उत्तर।} \end{aligned}$$

(१७) २८ + ६६ + १२६ + + n पर्यन्त।

$$\begin{aligned} & ३ \cdot ८ + ६ \cdot ११ + ९ \cdot १४ + \dots ३n (३n+५) \\ &= ३(३ \times १ + ५) + ३ \times २(३ \times २ + ५) + ३ \times ३(३ \times ३ + ५) + \dots \\ & \quad + ३n (३n+५) \\ &= (९ \times १ + १५) + (९ \times २^२ + १५ \times २) + (९ \times ३^२ + १५ \times ३) \\ & \quad + \dots + (९n^२ + १५n) \\ &= ९ (१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + n^२) + १५ (१ + २ + ३ + \dots + n) \\ &= ९ \times \frac{१०n+१}{६} \frac{n(n+१)}{३} + \frac{१५ \times n(n+१)}{२} \end{aligned}$$

- ∴ वह भादमी १ घण्टा में ७ माइल चलता है
 ∴ " " ५ मिनट में $\frac{7 \times 5}{60}$ माइल चलेगा
 = $\frac{7}{12}$ माइल
 ∴ वर्ग का कर्ण = $\frac{7}{12}$ माइल = $\frac{7 \times 100}{12}$ गज = २५२ गज ।
 ∴ वर्ग की एक भुजा = $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}} = \frac{252}{\sqrt{2}}$ गज
 ∴ वर्ग का भुजा योग = $\frac{4 \times 252}{\sqrt{2}}$ गज = ५०४ $\sqrt{2}$ गज ।

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

- (१) किसी समकोण समद्विबाहु त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं में से प्रत्येक ७ इंच है, तो उसका कर्ण बताओ ।
- (२) एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का कर्ण २५ फीट है, तो उसकी बराबर भुजाएँ बताओ ।
- (३) किसी समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का भुजायोग $3 + \sqrt{2}$ फीट है, तो उसका कर्ण बताओ ।
- (४) किसी आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमसे १५ फीट और ८ फीट है, तो उसका कर्ण बताओ ।
- (५) किसी आयत की एक भुजा ७२ गज और उसका कर्ण १२० गज है, तो उसकी दूसरी भुजा बताओ ।
- (६) एक वर्ग की भुजा $\frac{1}{2}$ माइल है, तो उसके कर्ण का मान ५ इंचमनत्र अड़ो तक निकालो ।
- (७) किसी वर्ग के एक कोने से उसके सामने के कोने तक जाने में १५ मिनट लगता है, तो उसके चारों तरफ घूमने में कितना समय लगेगा ।
- (८) किसी शर्करा मैदान को चारों तरफ घेरने में १० ह० २० गज दूरी लगते हैं, तो उसको एक कोन से सामने के कोन तक घेरने में क्या तर्ज लगेगा ?

व्यक्तजात्ये करणसूत्रं वृत्तवृत्तम् ।

इष्टो भुजोऽस्माद्द्विगुणोऽनित्तादिष्टस्य कृत्यैकविपुक्तयाऽऽनम् ।

कोटिः पृथक् सेष्टगुणा भुजोना कर्णा भवेत् व्यन्निर्दं तु ज्ञात्यम् ॥३॥

को = $\frac{\text{भु}^2}{\text{ह}} - \text{ह}$, तथा क = $\frac{\text{भु}^2}{\text{ह}} + \text{ह}$, अत उपपन्नं सर्वम् ।

अथवा—भुजः = भु, कोटिः = को, कर्णः = क, तथा क^२ = को^२ + भु^२

∴ $\frac{\text{क}^2}{\text{भु}^2} = \frac{\text{को}^2}{\text{भु}^2} + १$ । अत्र प्रथम पक्षस्य मूलम् = $\frac{\text{क}}{\text{भु}}$, द्वितीय पक्षे

$\frac{\text{को}^2}{\text{भु}^2} + १$ अस्मिन् 'सरूपके वर्णकृती तु यत्रेत्यादिना रूपप्रकृतौ रूपक्षेपे च कनिष्ठज्येष्ठे साधनीये तत्रेष्टवर्गं प्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेदित्यादिना रूपक्षेपे कनिष्ठम् $\frac{२\text{ह}}{\text{ह}^2 - १}$, अस्माज्ज्येष्ठम्—

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{२\text{ह}}{\text{ह}^2 - १}\right)^2 \times १ + १} = \sqrt{\frac{४\text{ह}^2}{(\text{ह}^2 - १)^2} + १} \\ &= \sqrt{\frac{४\text{ह}^2 + (\text{ह}^2 - १)^2}{(\text{ह}^2 - १)^2}} = \frac{\text{ह}^3 + \text{ह}^2 - २\text{ह} + १}{\text{ह}^2 - १} \\ &= \frac{\text{ह}^3 + २\text{ह}^2 + १}{\text{ह}^2 - १} = \frac{\text{ह}^2 + १}{\text{ह}^2 - १} । \end{aligned}$$

अत्र ह्रस्वं प्रकृतिवर्णस्य $\frac{\text{को}}{\text{भु}}$ अस्य मानमतः $\frac{\text{को}}{\text{भु}} = \frac{२\text{ह}}{\text{ह}^2 - १}$

∴ को = $\frac{२\text{ह} \times \text{भु}}{\text{ह}^2 - १}$, तथा ज्येष्ठं $\frac{\text{क}}{\text{भु}}$ अस्य मानमतः—

$$\frac{\text{क}}{\text{भु}} = \frac{\text{ह}^2 + १}{\text{ह}^2 - १} = \frac{\text{ह}^2 + १}{\text{ह}^2 - १} + १ - १ = \frac{\text{ह}^2 + १ + \text{ह}^2 - १}{\text{ह}^2 - १} - १ = \frac{२\text{ह}^2}{\text{ह}^2 - १}$$

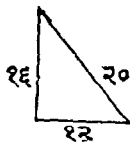
∴ क = $\frac{२\text{ह}^2 \times \text{भु}}{\text{ह}^2 - १} - \text{भु}$ अत उपपन्नं प्रथम सूत्रम् ।

द्वितीय सूत्रस्योपपत्तिस्तु प्रागेवाभिनिहितम् ।

उदाहरणम् ।

भुजे द्वादशके यौ यौ कोटिकर्णाचिनेकधा ।

प्रकाराभ्यां वद् क्षिप्रं ती तावकरणीगतौ ॥ १ ॥



अथवेष्टे २ । ४ । आभ्यां कोटिभुजकर्णाः १६।१२।
२० । एवमत्रानेकधा ।

उदाहरण—यहाँ इष्ट २ और १ कल्पना किया । अब सूत्र के अनुसार इष्टद्वय घात को द्विगुणित करने से $(२ \times १ \times २) = ४$ कोटि हुई । इष्टद्वय का वर्गान्तर $(४ - १) = ३$ भुज हुआ । इष्टों का वर्ग योग $(४ + १) = ५$ कर्ण हुआ । इसी प्रकार भिन्न इष्टों पर से कोटि, भुज और कर्ण का मान लाना चाहिये ।

कर्णकोटियुतौ भुजे च ज्ञाते पृथक्करणसूत्रं वृत्तम् ।

वंशाग्रमूलान्तरभूमिवर्गो वंशोद्धृतस्तेन पृथग्युतौनौ ।

वंशौ तदर्धे भवतः क्रमेण वंशस्य खण्डे श्रुतिकोटिरूपे ॥ ९ ॥

वंशाग्रमूलान्तर भूमिवर्गः वंशोद्धृतः, तेन वंशौ पृथक् युतौनौ कार्यौ तदर्धे क्रमेण वंशस्य खण्डे श्रुति कोटि रूपे भवतः ।

जहाँ कर्ण कोटि के योग और भुज ज्ञात हो वहाँ इसी सूत्र से कर्ण और कोटि का मान निकालना चाहिये । सूत्र में वंश का अर्थ कर्ण कोटि का योग एवं वंशाग्रमूलान्तर भूमि भुज है ।

क्रिया—वंश के अग्र और मूल के बीच की भुज रूप भूमि के वर्ग व वंश $(क + को)$ से भाग देकर लब्धि को वंश में एक जगह जोड़ कर दूसरा जगह घटाकर आधा करने से क्रम से कर्ण और कोटि स्वरूप वंश के दोनो टुकड़े हो जायेंगे । भावार्थ यह है कि भुज वर्ग को कर्ण कोटि के योग से भाग देकर लब्धि को कर्ण कोटि के योग में धन और ऋण कर आधा करने से क्रम से कर्ण और कोटि के मान होते हैं ।

उपपत्ति:—वंश = वं = क + को । वंशाग्रमूलान्तरभूमिः = अं. भु. = भुजः ।

∴ भु^२ = क^२ - को^२ = $(क + को) (क - को) = वं \times (क - को)$ ।

∴ अ. भु^२ = भु^२ = वं $(क - को)$

∴ क - को = $\frac{भु^२}{वं} = \frac{अं. भु^२}{वं}$ ततः संक्रमणेन—

इस सूत्र में सुत्रकर्ता का योग और कोटि ज्ञान रहने से सुत्र और कर्ता नाम जानने का गणि उद्दी गयी है ।

क्रिया—सूत्र (कोटि) के वर्ग में मय और विल की दूरी (सुत्र की कर्ता के योग) से भाग देकर उचित को मय और विल की दूरी (सुत्र की कर्ता के योग) में बटाकर आधा करने से विल से मय और मयूर के योगगत पर्यन्त अर्थात् सुत्र का मान होता है । सुत्र मान को सुत्र कर्ता के योग से बटाते से कर्ता का मान होगा ।

उपयुक्ति—सूत्र = कोटि । अद्विद्विअन्वम् = सु + क तदा
 $को^2 = क^2 - सु^2 = (क + सु) (क - सु) = अद्विद्वि \times (क - सु)$
 $\therefore क - सु = \frac{को^2}{अद्विअन्व} = \frac{सु^2}{अद्विअन्व}$ । ततः संकल्पनेन—

$$सुत्र = \frac{(सु + क) - (क - सु)}{२} = \frac{१}{२} \left(अद्विअन्व - \frac{सु^2}{अद्विअन्व} \right)$$

अत्र उपर्युक्तं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

अस्मिन् सन्मन्वने विलं तदुपरि श्रीशशिन्वर्गडी स्थितः
 सन्मने हस्तनयोच्छ्रिते त्रिगुणितसन्मन्प्रमाणान्तरे,
 दृष्ट्वाऽद्वि विलमात्रजन्मभवनं निर्यच्छं न तस्योपरि
 क्षिप्रं श्रुत्वा तयोर्विलान् अनिच्छरैः मान्येन मन्योयुनिः ॥ १ ॥

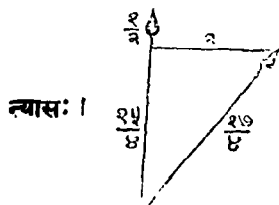
समान मूमि में १ हाथ का १ सन्मन् लडा था । सन्मन् (मन्मा) की उद में एक विल था और सन्मन् के ऊपर १ मयूर रैठा था । संयोग यम विल से २० हाथ की दूरी में १ मयूर को विल की तरफ आने दूरे देव का मयूर ने उभर कर कर्ता नाम से गिर कर उसे पकड़ लिया । दोनों की बात यदि समान हो, तो विल से कितने हाथ की दूरी पर उन दोनों का योग हुआ, यह ज्ञात्र बनाओ ।

$$\text{कोटिः} = \frac{\text{भु}^2 - \text{अं}}{\text{अं}} \quad | \quad \text{कर्णः} = \frac{\text{भु}^2 + \text{अं}}{\text{अं}} \quad | \quad \text{अत उपपन्नं सर्वम् ।}$$

उदाहरणम् ।

चक्रकौञ्चाकुलितसलिले कापि दृष्टं तडागे
तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणम् ।
मन्दं मन्दं चलितमनिलेनाहतं हस्तयुग्मे
तस्मिन् मग्नं गणक कथय क्षिप्रमम्भः प्रमाणम् ॥ १ ॥

हे गणक ! चक्रवाक और कौंच (करांकुलपत्नी) से शोभित जल वाले किसी तालाब में जल से ऊपर १ वित्ता का कमल हवा के झोंक से धीरे २ चलकर दो हाथ पर डूब गया, तो जल का प्रमाण बताओ ।



कोटिकर्णान्तरम् ३ । भुजः २ । लब्धं जल-
गाम्भीर्यम् १५/४ । इयं कोटिः १५/४ । इयमेव
कोटिः कलिकामानयुता जातः कर्णः २७/४ ।

उदाहरण—यहाँ भुज = २ हाथ । कोटिकर्णान्तर = ३ । अथ भुजवर्ग ४
को कोटिकर्णान्तर से भाग देने पर लब्धि ($४ \div ३$) = ८ में ३ को घटाने और
धन कर आधा करने से कोटि = $(८ - ३) = ५$ और कर्ण = $(८ + १)$

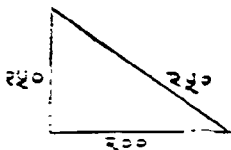
- ∴ ना. उ. न. स. अं. रे. न. य. रे. ना. उ. X स. अं. - रे. ना. उ. X य. रे. स. अं. X य. = ना. उ. रे. न. य. रे. न. स. अं. रे. ना. उ. X य.
- ∴ ४ ना. उ. X य. न. रे. स. अं. X य. = रे. ना. उ. X स. अं.
- ∴ रे. ना. उ. X य. न. स. अं. X य. = ना. उ. X स. अं.
- ∴ य (रे. ना. उ. न. स. अं.) = ना. उ. X स. अं.
- ∴ य = $\frac{\text{ना. उ. X स. अं.}}{\text{रे. ना. उ. न. स. अं.}}$ अन्त उच्यते ।

उदाहरणम् ।

वृक्षद्विस्तरादेः च्छ्रयाच्छ्रुतदुगे वापी कविः शोऽप्यगा-
 दुत्तीर्थाय परो वृत्तं श्रुत्विनयेनोद्द्वेयं क्रिच्छिद्रुमान् ।
 जातैवं समवा तयोर्थादि गताःश्रुद्धीनमानं क्रिच्छ्र-
 विद्विच्छेत् सुपरिक्रमोऽस्ति गणिते निप्रं तदाऽऽचन्व मे ॥ १ ॥

इस वृक्ष १०० हाथ ऊँचे पेड़ से उत्तर कर २०० हाथ की दूरी पर स्थित नालक में गया । दूसरा वृक्ष उसी स्थान में कुछ अरर उड़ल कर जमी जमी से नालक में गया । उन दोनों की माल यदि बराबर हो, तो यह किनसा उन्न उड़ला यह बताओ । यदि तुम गणित में परिपन्न स्थित हो, तो शीघ्र बहो ।

न्यासः ।



वृक्षवायनरम् १०० । वृक्षोद्गमः
 २०० लम्बश्रुद्धीनमानम् ५० कोटिः
 १२० अन्तः २५० सुत्रः २०० ।

उदाहरण—वृक्ष और नालक की दूरी = २०० हाथ । वृक्ष की ऊँचाई = १०० हाथ । अब सूत्र से अनुसार श्रुतमान वृक्ष की ऊँचाई में शरीरान्तर को हने पर (१०० x २ - २००) = ००० हुआ । इसमें वृक्ष की ऊँचाई में गुणित शरीरान्तर (१०० x २००) = २०००० में भाग देने पर (२००० ÷ २००) = ५० उद्धीनमान हुआ । अब कोटि = वृक्ष की ऊँचाई में गुणित उद्धीनमान = १०० ÷ ५० = २५० । सुत्र = २०० अन्तः कोटि = $\sqrt{(२५०)^2 + (२००)^2} = \sqrt{२२५०० + ४००००} = \sqrt{६२५००} = २५० ।$

का योग दूसरा टुकड़ा और ज्ञात भुजा के योग के बराबर है। यदि वह योग १०० इञ्च है, तो कर्ण और अज्ञात भुजा बताओ।

- (३) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा ४८ फीट है। उसकी दूसरी भुजा दो ऐसे हिस्सों में बाँट दी गई है कि एक हिस्सा और कर्ण का योग दूसरा हिस्सा और ज्ञात भुजा के योग के बराबर है। यदि वह योग ९६ फीट है, तो कर्ण और अज्ञात भुजा अलग-अलग बताओ।
- (४) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा २७ गज है। उसकी दूसरी भुजा दो ऐसे हिस्सों में बाँट दी गई है कि एक हिस्सा और कर्ण का योग दूसरा हिस्सा और ज्ञात भुजा के योग के बराबर है। यदि वह योग ५४ गज हो, तो कर्ण और अज्ञात भुजा अलग-अलग बताओ।
- (५) समकोण त्रिभुज के कर्ण और अज्ञात भुजा बताओ, यदि एक भुजा कर्ण और दूसरी भुजा के एक टुकड़े का योग तथा ज्ञात भुजा और दूसरे टुकड़े का योग निम्नलिखित हों:—

मु, क + दूसरी भुजा का पहला टुकड़ा = ज्ञात भुजा + दूसरी भुजा
२ रा टुकड़ा

(६)	१६ फीट	३२ फीट	और ३२ फीट
(७)	२१ फीट	४२ फीट	और ४२ फीट
(८)	५७ इञ्च	११४ इञ्च	और ११४ इञ्च
(९)	४५ गज	९० गज	और ९० गज
(१०)	३६ फीट	७२ फीट	और ७२ फीट
(११)	६० फीट	१२० फीट	और १२० फीट
(१२)	७ गज	२८ गज	और २८ गज
(१३)	८ इञ्च	२० इञ्च	और २० इञ्च

भुजकोट्योर्योगे कर्णे च ज्ञाते प्रथमकरणसूत्रं वृत्तम् ।

कर्णस्य वर्गाद्द्विगुणाद्विशोध्यो

दोःकोटियोगः स्वगुणोऽस्य मूलम् ।

$$\therefore क = \frac{५२+८}{२} = \frac{६०}{२} = ३० \text{ इञ्च।}$$

$$\text{और ल} = \frac{५२-८}{२} = \frac{४४}{२} = २२ \text{ इञ्च।}$$

(१) एक समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं का योग ३६४ फीट और कर्ण २६० फीट हैं, तो उसकी भुजायें अलग-अलग बताओ।

\therefore आ - लं = $\sqrt{२ क^२ - (आ + लं)^२}$ । यहाँ क = २६० फीट और आ + लं = ३६४ फीट।

$$\begin{aligned} \therefore \text{आ - लं} &= \sqrt{२ \times २६०^२ - ३६४^२} = \sqrt{२ \times ६७६०० - १३२४९६} \\ &= \sqrt{१३५२०० - १३२४९६} = \sqrt{२७०४} = \sqrt{१३ \times २०८} = \\ &= \sqrt{१३ \times १३ \times ४ \times ४} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{१३^२ \times ४^२} = १३ \times ४ = ५२ \text{ फीट।}$$

$$\therefore \text{आ} = \frac{३६४ + ५२}{२} = \frac{४१६}{२} = २०८ \text{ फीट।}$$

$$\text{और लं} = \frac{३६४ - ५२}{२} = \frac{३१२}{२} = १५६ \text{ फीट।}$$

(४) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं का अन्तर ११ इञ्च और कर्ण ५५ इञ्च हैं, तो उसकी भुजायें अलग-अलग बताओ।

\therefore आ + लं = $\sqrt{२ क^२ - (आ - लं)^२}$ । यहाँ कर्ण = ५५ इञ्च।

और (आ - लं) = ११ इञ्च है।

$$\begin{aligned} \therefore \text{आ + लं} &= \sqrt{२ \times ५५^२ - ११^२} = \sqrt{११^२ (२ \times ५^२ - १)} \\ &= \sqrt{११^२ \times (५० - १)} = \sqrt{११^२ \times ४९} = \sqrt{११^२ \times ७^२} \\ &= ११ \times ७ = ७७ \text{ फीट।} \end{aligned}$$

$$\text{अब, आ} = \frac{७७ + ११}{२} = \frac{८८}{२} = ४४ \text{ फीट।}$$

$$\text{और लं} = \frac{७७ - ११}{२} = \frac{६६}{२} = ३३ \text{ फीट।}$$

अभ्यासाय प्रश्न।

(१) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा ५८८ इञ्च और कर्ण तथा दूसरी भुजा का योग ८८२ इञ्च हैं, तो कर्ण और दूसरी भुजा अलग-अलग

दोनों बर्तनों के गुणवत्त्व को बर्तनों के योग से मानें, तो उत्तर बर्तन के मूल और दोनों के मिलाने वाली रेशाओं के योग विन्दु में (मूल पर) उत्तर का मान आ जायगा। इस प्रकार से दोनों बर्तनों के अलग-अलग गुण को इनमें बर्तनों के योग से मानें, तो उत्तर के दोनों तरफ के मानों का मान समान ही जायेगा।

उदाहरण—अब अघ = वृद्धिमान, अग = लघुमान, इत्यन्तव्यः। अयोनि

व

$$\frac{\text{मूलमगनमूत्रं अघ, अघ}}{\text{अयोनि}} = २।$$

$$\text{अघ} = \text{वृद्धिमान} = \text{वृ. मं.} \quad \text{अग} = \text{लघुमान} = \text{ल. मं.} \quad \text{अघ} =$$

$$\text{मूनिः। अघ अघ अघ, इत्यन्तव्यः। अयोनि$$

व

$$\text{मनो} - \text{वृ. मं.} = \text{ल. मं.} = \frac{\text{अघ} \times \text{अघ}}{\text{अघ}} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.}}$$

$$\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.} = \text{अघ} = \frac{\text{अघ} \times \text{अघ}}{\text{अघ}} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.}}$$

$$\text{अघ} \quad \text{अघ} \quad \text{अघ} \quad \therefore \text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.}} + \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{ल. मं.}}$$

$$= \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.} \times \text{ल. मं.} + \text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.} \times \text{वृ. मं.}}{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.} (\text{ल. मं.} + \text{वृ. मं.})}{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}$$

$$= \text{अघ} = \text{मूनिः।}$$

$$\therefore \text{वृ. मं.} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.} (\text{ल. मं.} \times \text{वृ. मं.})} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{ल. मं.} \times \text{वृ. मं.}}$$

$$\text{अघ ल. मं.} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.}} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.} (\text{ल. मं.} \times \text{वृ. मं.})} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{ल. मं.} \times \text{वृ. मं.}}$$

$$\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.}} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{वृ. मं.} (\text{ल. मं.} \times \text{वृ. मं.})} = \frac{\text{वृ. मं.} \times \text{ल. मं.}}{\text{ल. मं.} \times \text{वृ. मं.}}$$

अब उत्तरवत् ।

(४) किसी पर्वत की तीन श्रेणियाँ हैं, जिनमें बीच की श्रेणी सबसे नीची है। दोनों तरफ की श्रेणियों की ऊँचाई क्रम से २०० और ३०० गज हैं। यदि परस्पर एक की जड़ से दूसरे की चोटी तक बंधे हुये सूत्रों के योग बिन्दु बीच वाली श्रेणी की चोटी पर हो, तो बीच की श्रेणी की ऊँचाई बताओ।

अक्षेत्रलक्षणसूत्रम् ।

धृष्टोदिष्टभुजं क्षेत्रं यत्रैकत्राहुतः स्वल्पा ।

तदितरभुजयुतिरथ वा तुल्या ज्ञेयं तदक्षेत्रम् ॥ १६ ॥

यत्र एकत्राहुतः तदितरभुजयुतिः स्वल्पा, अथवा तुल्या भवेत् तत् धृष्टो-
दिष्टं ऋजुभुजं क्षेत्रं अक्षेत्रं ज्ञेयम् ।

जिस क्षेत्र (त्रिभुज चतुर्भुज आदि) में एक भुज से शेष भुजों का योग अल्प वा तुल्य हो, तो उसे अक्षेत्र समझना चाहिये, अर्थात् वैसा क्षेत्र नहीं बन सकता है।

उपपत्ति:—त्रिभुजे भुजद्वययोगस्तृतीयभुजादधिको भवतीति क्षेत्रमिति-
नियमेनास्य वासना स्पष्टेत्यलम् ।

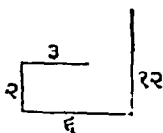
उदाहरणम् ।

चतुस्रे त्रिपङ्क्त्या भुजास्त्रयस्य त्रिपणत्र ।

उद्दिष्टा यत्र धृष्टेन तदक्षेत्रं विनिर्दिशेत् ॥ १ ॥

एते अनुपपन्ने क्षेत्रे ।

क्रिमी दृष्ट ने एक चतुर्भुज और एक त्रिभुज बताया, जिनमें चतुर्भुज की भुजायें क्रमसे ३, ६, २ और १२ तथा त्रिभुज की भुजायें ३, ६ और ९ हैं। लेकिन ये दोनों क्षेत्र उक्त रीति से अक्षेत्र हैं क्योंकि उक्त चतुर्भुज में तीन भुजाओं का योग चौथी भुजा से छोटा है और उक्त त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा के बराबर है।



$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 \times 36 = \text{व. इ.} = \frac{6 \times 2 \times 36}{\sqrt{3}} \text{ व. इ.}$$

$$= \frac{198}{\sqrt{3}} \text{ व. इ.}$$

(३) एक समभुज त्रिभुजाकार उद्यान को घेरने में ४ आना प्रति गज की दर से ३३६ रु० खर्च होता है, तो किसी कोण से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु की दूरी बताओ।

∴ प्रति गज चार आने ($\frac{1}{4}$ रु०) की दर से ३३६ रु० में (३३६ × ४ =) १३४४ गज घेरा जायगा।

∴ उस समभुज त्रिभुज का भुजयोग = १३४४ गज

∴ उस त्रिभुज की एक भुजा = $\frac{1344 \times 3}{3}$ ग० = ४४८ ग०।

अब किसी कोण से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु की दूरी

समभुज त्रिभुज का लम्ब है। ∴ अभीष्ट दूरी = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ भु = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 448$
४४८ गज = $\sqrt{3} \times 224$ गज।

(४) किसी समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से एक ३० फीट है यदि उसका आधार ४८ फीट हो, तो उसका लम्ब और क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{लम्ब} = \sqrt{\text{बराबर भुजा}^2 - \frac{\text{आ}^2}{4}} = \sqrt{30^2 - 24^2} =$$

$$\sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18 \text{ फीट}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{\text{ल} \times \text{आ}}{2} = \frac{18 \times 48}{2} \text{ वर्ग फीट} = \frac{9 \times 48}{1} = 432 \text{ वर्ग फीट}$$

(५) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाएँ १२ और १६ फीट हैं तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ समकोण बनानेवाली भुजाओं का गुणनफल} = \frac{1}{2} \times 12 \times 16$$

$$= 96 \text{ वर्ग फीट}।$$

(६) किसी समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल १ एकड़ और समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक ४८४ गज है, तो दूसरी भुजा बताओ।

$$\text{समकोण वर्ग अभीष्ट भुजा} = \frac{2 \text{ क्षेत्रफल}}{\text{समकोण बनानेवाली १ भुजा}}$$

२० माइल है। प्रत्येक दो गाँव के मध्य में एक हाई स्कूल है, तो दोनों गाँव से उस स्कूल की दूरी बताओ।

- (३) किसी समभुज त्रिभुजाकार मैदान को घेरने में २ आना प्रति मिनट की दर से १८ ह० १२ आना खर्च होता है, तो किसी कोने में दूसरे सामने की भुजा के मध्य बिन्दु की दूरी बताओ।
- (४) कोई आदमी प्रतिघण्टा ६ माइल की दर से चलकर २० मिनट में एक समभुज त्रिभुज बनाता है, तो किसी कोण से सामने की भुजा के मध्य बिन्दु तक जाने में उसे कितना समय लगेगा।
- (५) एक समद्विबाहु त्रिभुज की ऊँचाई बताओ जिसकी बराबर भुजा और आधार क्रम से १५ फीट और १८ फीट है।
- (६) किसी त्रिभुज की ऊँचाई १५ फीट और आधार २० फीट है, तो इसका क्षेत्रफल बताओ।
- (७) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ३०० वर्ग गज है। यदि उसका आधार २५ गज हो तो उसकी ऊँचाई बताओ।
- (८) एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा १२ गज और उसका कर्ण २० गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (९) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $4\sqrt{2}$ वर्ग फीट है, तो उसकी बराबर भुजा बताओ।
- (१०) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजा २५ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (११) किसी समभुज त्रिभुज की भुजा १३ गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (१२) किसी समभुज त्रिभुज का क्षेत्रफल $16\sqrt{3}$ वर्ग फीट है, तो उसकी भुजा बताओ।
- (१३) किसी समकोण त्रिभुज को समकोण बनानेवाली भुजाएँ २० और २५ फीट हैं, तो उसका क्षेत्रफल और समकोण बिन्दु से दूसरे कोने तक की दूरी बताओ।

$$= \frac{(अक + कग + जग)}{२} \frac{(अक + कग - जग)}{२} \frac{(जग + अक - कग)}{२} \frac{(जग + कग - अक)}{२}$$

अत्र यदि $\frac{अक + कग + जग}{२} =$ सुत्रयोगात् $= \frac{यो}{२}$, तदा $\frac{अक + कग - जग}{२} = \frac{यो}{२} - जग$,

$$\frac{जग + अक - कग}{२} = \frac{यो}{२} - कग, \quad \frac{जग + कग - अक}{२} = \frac{यो}{२} - अक$$

$$\therefore \text{फलवर्गः} = \frac{यो}{२} \left(\frac{यो}{२} - जग \right) \left(\frac{यो}{२} - कग \right) \left(\frac{यो}{२} - अक \right)$$

$$\therefore \text{फल} = \sqrt{\frac{यो}{२} \left(\frac{यो}{२} - जग \right) \left(\frac{यो}{२} - कग \right) \left(\frac{यो}{२} - अक \right)} \text{ अत उपरत्र त्रिभुज-फलानयनम् ।}$$

अथ चतुर्भुज फलानयने तु कल्प्यते अकगघ चतुर्भुजं यस्य अक, कग, गघ, अघ, भुजाः, जग कर्णस्तदोक्तचतुर्भुजफलम् = Δ अकग + Δ अघग परब्र-

$$\text{त्रिकोणमित्या Δ अकग} = \frac{अक \times कग \times ज्या \angle अकग}{२}$$
, तथा

$$\text{अ घ ग} = \frac{अ घ \times ग घ \times ज्या \angle अ घ ग}{२}$$

∴ च.फ^२ = $\left(\frac{यो}{२} - गघ\right) \left(\frac{यो}{२} - अघ\right) \left(\frac{यो}{२} - कग\right) \left(\frac{यो}{२} - अक\right) -$
भुजघात × कोज्या^२ $\frac{१}{२}$ म

अत्र भुजानां स्थिरत्वे चतुर्भुजफलस्य तदैव परमाधिक्यं यदा “कोज्या $\frac{१}{२}$ म” अस्य मानं परमाल्पं शून्यसममर्थाद्यदा $\frac{१}{२}$ म = ९०, वा - म = १८०°
= ∠ क + ∠ घ, परब्रह्मं स्थितिर्वृत्तान्तर्गतचतुर्भुज एव भवितुमर्हतीत्युपनं
अस्फुटफलं चतुर्भुजे ।

उदाहरणम् ।

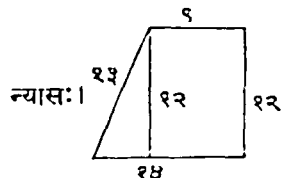
भूमिश्चतुर्दशीमिता मुखमङ्कसङ्ख्यं

बाहू त्रयोदशदिवाकरसम्मितौ च ।

लम्बोऽपि यत्र रविसंख्यक एव तत्र

क्षेत्रे फलं कथय तत् कथितं यदाद्यैः ॥ १ ॥

जिस चतुर्भुज में आधार १४, मुख ९ दोनों भुजायें १३ और १२ हैं,
एवं लम्ब भी १२ है, उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ ।



भूमिः १४ । मुखं ९ । बाहू १३ । १२ ।

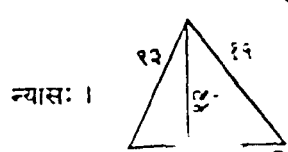
लम्बः १२ । उक्तवत्करणेन जातं क्षेत्र-

फलं करणी १६८०० । अस्याः पदं

किञ्चिन्वूनमेकचत्वारिंशच्छतम् १४१ ।

इदमत्र क्षेत्रे न वास्तवं फलं किन्तु लम्बेन निम्नं कुमुखैकघखण्डमिति
वक्ष्यमाणकरणेन वास्तवं फलम् १३८ ।

अत्र त्रिभुजस्य पूर्वोदाहृतस्य ।



भूमिः १४ । भुजौ १३ । १२ । अने-

नापि प्रकारेण त्रिबाहुके तदैव वास्तवं

फलम् ८४ । अत्र चतुर्भुजस्यास्पष्ट

आधार 'व' हो, तो भुज योगार्ध = $\frac{अ + अ + व}{२} = (अ + \frac{व}{२})$, अतः 'सर्वे दोर्युतिदलम्' इस सूत्र के अनुसार उसका क्षेत्रफल

$$= \sqrt{(अ + \frac{व}{२})(अ + \frac{व}{२} - अ)(अ + \frac{व}{२} - अ)(अ + \frac{व}{२} - व)}$$

$$= \sqrt{(अ + \frac{व}{२})(\frac{व}{२})(\frac{व}{२})(अ - \frac{व}{२})} = \sqrt{(अ^२ - \frac{व^२}{४})(\frac{व^२}{४})}$$

$$= \sqrt{(४अ^२ - व^२) \frac{व^२}{१६}} = \frac{व}{४} \sqrt{४अ^२ - व^२} \dots \dots \dots (१)$$

किसी त्रिभुज की भुजायें क्रम से 'अ' 'व' 'स' और उनका योगार्ध = $\frac{यो}{२}$ हो, तो उसका क्षेत्रफल = $\sqrt{\frac{यो}{२}(\frac{यो}{२} - अ)(\frac{यो}{२} - व)(\frac{यो}{२} - स)} \dots \dots \dots (२)$

उदाहरण

(१) एक त्रिभुज की भुजायें १३, १४ और १५ फीट हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{यहाँ भुज योगार्ध} = \frac{१३ + १४ + १५}{२} = \frac{४२}{२} = २१ \text{ फीट।}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = \sqrt{२१(२१ - १३)(२१ - १४)(२१ - १५)}$$

$$= \sqrt{२१ \times ८ \times ७ \times ६} = \sqrt{७ \times ३ \times २ \times ४ \times ७ \times ३} = \sqrt{७^२ \times ३^२ \times २^२}$$

$$= ७ \times ३ \times २ = ८४ \text{ वर्ग फीट।}$$

(२) किसी समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजा २५ गज और उसका आधार ४० गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

अब क्षेत्रफल = $\frac{व}{४} \sqrt{४अ^२ - व^२}$, जहाँ 'अ' और 'व' समद्विबाहु त्रिभुज के क्रम से बराबर भुजा और आधार की लम्बाई है।

$$\text{यहाँ } अ = २५ \text{ गज और } व = ४० \text{ गज।}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = \frac{४०}{४} \sqrt{४ \times २५^२ - ४०^२} = १० \sqrt{५००} = ४००$$

$$= १० \sqrt{२५००} = १० \sqrt{१०० \times २५} = १० \times ५ = २०० \text{ वर्ग गज।}$$

(३) किसी त्रिभुज की भुजायें २५, ३० और ५६ गज हैं, तो व्ययों की भुजा के ऊपर मानने के क्रम से लम्ब की लम्बाई बताओ।

$$\text{यहाँ भुज योगार्ध} = \frac{२५ + ३० + ५६}{२} = \frac{१११}{२} = ५५.५ \text{ गज।}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = \sqrt{५५.५(५५.५ - २५)(५५.५ - ३०)(५५.५ - ५६)}$$

$$= \sqrt{६० \times ३०.५ \times २५.५} = \sqrt{५ \times ३ \times ३ \times ५ \times ३ \times ५ \times ३ \times ५}$$

यदि वृत्तान्तगत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से अ, क, ग और व हो तथा
उसका योग = यो, तो उसका क्षेत्रफल

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{यो}}{४} - \text{अ}\right) \left(\frac{\text{यो}}{४} - \text{क}\right) \left(\frac{\text{यो}}{४} - \text{ग}\right) \left(\frac{\text{यो}}{४} - \text{व}\right)} \dots \dots (1)$$

उदाहरण

(१) किसी वृत्तान्तगत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से २५, ३९, ६० और
५२ गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

यहाँ भुजयोग = २५ + ३९ + ६० + ५२ = १७६ गज । \therefore यो = $\frac{१७६}{४}$ गज ।

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= \sqrt{(१७६ - २५)(१७६ - ३९)(१७६ - ६०)(१७६ - ५२)} \text{ वर्ग गज} \\ &= \sqrt{३३ \times ४२ \times २८ \times ३६} = \sqrt{९ \times ७ \times ४२ \times ७ \times ४ \times ३६} \\ &= \sqrt{३^२ \times ७^२ \times ७^२ \times २^२ \times ६^२} = ३ \times ७ \times ७ \times २ \times ६ \\ &= ४२ \times ३६ = १५१२ \text{ वर्ग गज ।} \end{aligned}$$

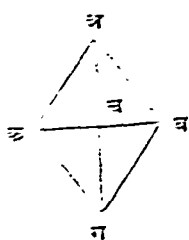
(२) किसी वृत्तान्तगत चतुर्भुज की भुजायें ५०, ६०, ८० और ८६ इंच हैं,
तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

यहाँ भुजयोगार्ध = $\frac{\text{यो}}{२} = \frac{५० + ६० + ८० + ८६}{२} = ३५३$ इंच ।

$$\begin{aligned} \therefore \text{अर्थात् क्षेत्रफल} &= \sqrt{(३५३ - ५०)(३५३ - ६०)(३५३ - ८०)(३५३ - ८६)} \text{ वर्ग इंच} \\ &= \sqrt{६६ \times ७६ \times ५६ \times २९} = \sqrt{११ \times ६ \times २६ \times ३ \times २३ \times २ \times २३ \times २९} \\ &= \sqrt{११ \times ४ \times २ \times २६ \times २६ \times ४ \times २९ \times ३} \\ &= \sqrt{२६^२ \times ४^२ \times ६६ \times २९} \text{ वर्ग इंच} \\ &= २६ \times ४ \sqrt{१२१४} = १०४ \sqrt{१२१४} \text{ वर्ग इंच ।} \end{aligned}$$

तुल्य चतुर्भुज में अर्धवृत्त इच्छानुसार पृष्ठ कर्ण का मान खोजना कर उसके वर्ग को चतुर्भुजगत सुत्रवर्ग में बटाकर शेष का वर्गमूल लेने से दूसरे कर्ण का मान होना है। उन दोनों अमान कर्णों के बीच का अंतर तुल्य चतुर्भुज अर्थात् विरलकोण समचतुर्भुज में वास्तव दूट होता है। मन्त दोनों कर्णवाले तुल्यचतुर्भुज अर्थात् वर्गक्षेत्र में और आयत में सुत्र और दोट्टे के गुणकद्वय-तुल्य क्षेत्रद्वय होता है। अन्वय मन्तान् अन्वय वाले विरल चतुर्भुज में मृत्ति और सुत्र के योगार्थ को अन्वय से गुणा करने पर क्षेत्रद्वय होता है।

उदाहरण:—अ क ग व समचतुर्भुज, अ क व क व कर्णों



तुल्य। अत्र कर्णरेखा चतुर्भुजमर्धितं भवति तथा कर्णों परस्पर अर्धौ लः इति क्षेत्रमिथा मष्टंतेत अ क व त्रिभुजं क व = $\sqrt{अ क^2 - अ व^2} = \sqrt{सु^2 - (अ ग)^2}$
 $= \sqrt{सु^2 - अ ग^2} = \sqrt{४सु^2 - अ ग^2} ।$

अत्र क व = $\frac{क व}{२} = \frac{द्वि० क}{२} ।$

∴ द्वि० क = $\sqrt{४सु^2 - अ ग^2} = \sqrt{४सु^2 - अ ग^2}$

∴ द्वि० क = $\sqrt{४सु^2 - अ ग^2} ।$ अथ अ क ग व चतुर्भुजकर्म =

$\triangle अ क व + \triangle क ग व = २ \triangle अ क व = \frac{२ \times अ क व \times क व}{२} = अ क व \times क व$

$= \frac{अ ग}{२} \times क व = \frac{अ ग \times द्वि० क}{२} ।$ अतः उक्तचतुर्भुजकर्मो भवति द्वि० क × अ ग ।

पुनः वर्गक्षेत्रे आयते च सुत्रदोष्टिगतः कर्ण भवतीति मष्टमेव वेदागतौ विद्वान् । अथ अ क ग व समचतुर्भुजम् । अथ अ क व क ग कर्णों

मानी । अ क ग व समचतुर्भुजकर्म = $\triangle अ क व$

$+ \triangle अ क ग + \triangle क ग व = \frac{अ क \times अ व}{२} + \frac{अ क \times क ग}{२} + \frac{अ क \times क व}{२} = \frac{अ क (अ व + क ग + क व)}{२}$

$= \frac{अ क (अ व + अ क + क ग + क व)}{२} = \frac{अ क (२ अ + अ क)}{२} = \frac{अ क (अ + सुत्र)}{२} ।$

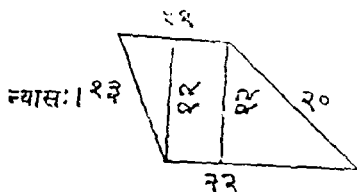
(कु = सुत्र) अतः उक्तचतुर्भुजकर्म ।



बाहू त्रयोदशानखप्रमितौ च लम्बः ।

सूर्योन्मितश्च गणितं वद तत्र किं स्यात् ॥ २ ॥

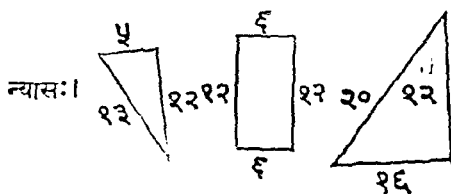
जिस समलम्ब चतुर्भुज का मुख ११, आधार (भूमि) २२, तो दोनों भुजायें क्रम से १३ और २० तथा लम्ब १२ हैं उसका क्षेत्रफल बताओ ।



वदनम् ११ । विश्वम्भरा २२ ।
बाहू १३ । २० । लम्बः १२ ।
अथ सर्वदोर्युतिदलमित्यादिना
स्थूलफलं २५० । वास्तवन्तु
लम्बेन निम्नं कुमुखैक्यखण्ड-

मिति जातं फलम् । १६८ । क्षेत्रस्य खण्डत्रयं कृत्वा फलानि पृथगानीय
ऐक्यं कृत्वाऽस्य फलोपपत्तिर्दर्शनीया ।

खण्डत्रयदर्शनम्—



प्रथमस्य भुजको-
टिकर्णाः १३ । १२ । १३
द्वितीयस्यायतस्य वि-
स्तृतिः ६ । दैर्घ्यम् १२ ।

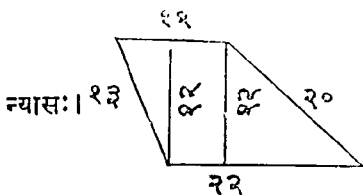
तृतीयस्य भुजकोटिकर्णाः १६ । १२ । २० । अत्र त्रिभुजयोः क्षेत्रयोर्भु-
जकोटिघाताय फलम् । आयते चतुरस्रे क्षेत्रे तदुजकोटिघातः फलम् ।
यथा प्रथमक्षेत्रे फलम् ३० । द्वितीये ७२ । तृतीये ६६ । एतान्मैत्र्यं सर्व-
क्षेत्रे फलम् । १६८ ।

उदाहरण—यहाँ 'सर्वदोर्युतिदलं' इस गुण के अनुसार एक समलम्ब
चतुर्भुज का स्थूलफल = २५० और 'लम्बेन निम्नं कुमुखैक्यखण्डं' इस गुण
के अनुसार वास्तवफल = $\frac{11 \times 12}{2} + 11 \times 12 + \frac{11 \times 12}{2} = 168$ । न्यास—एक
समलम्ब चतुर्भुज को तीन भागों में बाँटने से पहले वास्तविक चतुर्भुज
का ११, २२, १३, २०, १२ के आकार में आकार देकर और नीचे के क्रम से १३ और २० तथा

बाहू त्रयोदशानखप्रमितौ च लम्बः ।

सूर्योन्मितश्च गणितं वद तत्र किं स्यात् ॥ २ ॥

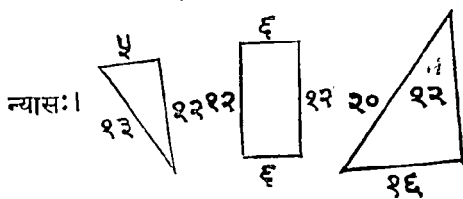
जिस समलम्ब चतुर्भुज का मुख ११, आधार (भूमि) २२, शेष दोनों भुजायें क्रम से १३ और २० तथा लम्ब १२ हैं उसका क्षेत्रफल बताओ ।



वदनम् ११ । विश्वम्भरा२२।
बाहू १३ । २० । लम्बः १२ ।
अथ सर्वदोर्युतिदलमित्यादिना
स्थूलफलं २५० । वास्तवन्तु
लम्बेन निम्नं कुमुखैक्यखण्ड-

मिति जातं फलम् । १६८ । क्षेत्रस्य खण्डत्रयं कृत्वा फलानि पृथगानीय
ऐक्यं कृत्वाऽस्य फलोपपत्तिर्दर्शनीया ।

खण्डत्रयदर्शनम्—



प्रथमस्य भुजको-
टिकर्णाः ५ । १२ । १३
द्वितीयस्यायतस्य वि-
स्तृतिः ६ । दैर्घ्यम् १२ ।

तृतीयस्य भुजकोटिकर्णाः १६ । १२ । २० । अत्र त्रिभुजयोः क्षेत्रयोर्भु-
जकोटिघातार्धं फलम् । आयते चतुरस्रे क्षेत्रे तद्भुजकोटिघातः फलम् ।
यथा प्रथमक्षेत्रे फलम् ३० । द्वितीये ७२ । तृतीये ६६ । एषामैक्यं सर्व-
क्षेत्रे फलम् । १६८ ।

उदाहरण—यहाँ 'सर्वदोर्युतिदलं' इस सूत्र के अनुसार उक्त समलम्ब
चतुर्भुज का स्थूलक्षेत्रफल = २५० और 'लम्बेन निम्नं कुमुखैक्यखण्डं' इस सूत्र
के अनुसार वास्तवफल = $\frac{10 \times (13 + 20)}{2} = 6 \times 13 = 198$ । अथवा—उक्त
समलम्ब चतुर्भुज को तीन भागों में बाँटने से पहले जात्यन्निभुज की भुजायें
५।१२।१३ दूसरे आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १२ और ६ तथा

चतुर्भुज के अन्तर्गत त्रिभुज में कर्ण और एक भुज को भुज तथा आधार को भूमि मानकर 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस रीति से लम्ब का ज्ञान करना चाहिये ।

अत्र लम्बज्ञानार्थं सव्यभुजाप्रादक्षिणभुजमूलगामी इष्टकर्णः सप्त-सप्ततिमितः ७७ कल्पितस्तेन चतुर्भुजान्तस्त्रिभुजं कल्पितम् । तत्रासौ कर्ण एको भुजः ७७ । द्वितीयस्तु सव्यभुजः ६८ । भूः सैव ७५ । अत्र प्राग्वल्लब्धो लम्बः ३०८ ।

उदाहरण—यहाँ कर्ण का मान ७७ माना । अब चतुर्भुज के भीतर के त्रिभुज की भुजायें ६८ और ७७ तथा भूमि ७५ हुये, तो 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इत्यादि रीति से लम्ब का मान ३०८ आया ।

लम्बे ज्ञाते कर्णज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तम्

यल्लम्बलम्बाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं कथिताऽवधा सा ।

तदूनभूवर्गसमन्वितस्य यल्लम्बवर्गस्य पदं स कर्णः ॥२५॥

लम्बलम्बाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं यत् सा अवधा कथिता । तदूनभूवर्गसमन्वितस्य लम्बवर्गस्य यत् पदं स कर्णः स्यात् ।

लम्ब और लम्बाश्रित जो भुज, उन दोनों का वर्गान्तरमूल आवाधा होती है । आवाधा और भूमि के अन्तर वर्ग में लम्ब-वर्ग जोड़कर मूल लेने से कर्ण होता है ।

अस्योपपत्तिस्तु पूर्वोक्तचतुर्भुजक्षेत्रविन्यासेन स्पष्टा ।

अत्र सव्यभुजाप्रालम्बः किल कल्पितः ३०८ ।

अतो जाताऽऽवधा ३५५ ।

तदूनभूवर्गसमन्वितस्येत्यादिना जातः कर्णः ७७ ।

उदाहरण—उक्त चतुर्भुज में लम्ब ३०८ है और लम्बाश्रित भुज ६८ है,

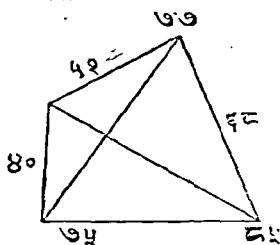
तो सूत्र के अनुसार $\sqrt{\text{भु}^2 - \text{लम्ब}^2} = \sqrt{६८^2 - (३०८)^2}$

$$= \sqrt{४६२४ - ९४८६४} = \sqrt{११५६०० - ९४८६४} = \sqrt{२०६९६}$$

$= ३५५$ आवाधा । इसको भूमि ७५ में घटा कर शेष ३३१ के वर्ग

५३३६१ में लम्ब वर्ग ९४८६४ को जोड़ कर मूल लेने से ७७ कर्ण हुआ ।

न्यासः—



तत्र चतुर्भुजे सव्यभुजायाद् दक्षिण-
भुजमूलगामिनः-कर्णस्य मानं कल्पितम्
७७ । तत्कर्णरेखावच्छिन्नस्य क्षेत्रस्य
मध्ये कर्णरेखोभयतो ये त्र्यन्त्रे उत्पन्ने
तयोः कर्णं भूमिं तदितरौ च भुजौ प्रक-
ल्प्य प्राग्वल्लम्बः आवाधा च साधिता ।

तद्दर्शनम् । लम्बः ६० । द्वितीयलम्बः २४ । आवाधयो ४५ । ३२ । रेक-
ककुप्स्थयोरन्तरस्य १३ कृते १६६ । लम्बैक्य ८४ । कृतेञ्च ७०५६ ।
योगः ७२२५ । तस्य पदं द्वितीयकर्णप्रमाणम् ८५ ।

उदाहरण—उक्त चतुर्भुज में ६८ और ७५ को भुज तथा ७७ कर्ण को
भूमि मानकर 'त्रिभुजे भुजयोयोगः' इस सूत्र के अनुसार बड़ी आवाधा
४५ और छोटी आवाधा ३२ एवं लम्ब ६० हुए । इसी तरह ५९ और ४० को
भुज एवं ७७ कर्ण को भूमि मानकर उक्त रीति से आवाधा और लम्ब क्रम से
४५, ३२ और २४ होते हैं । 'अ व एक तरफ की आवाधाओं का अन्तर
१३ के वर्ग १६९ में लम्बयोग ८४ का वर्ग ७०५६ को जोड़ कर ७२२५ का
मूल ८५ दूसरा कर्ण हुआ ।

अत्रेष्टकर्णकल्पने विशेषोक्तिसूत्रं सार्द्धवृत्तम् ।

कर्णाश्रितं स्वल्पभुजैक्यमुर्वी प्रकल्प्य तच्छेषमितौ च वाहू ।

साध्योऽवलम्बोऽथ तथाऽन्यकर्णः स्वोर्व्याः कथञ्चिच्छ्रवणो न दीर्घः॥

तदन्यलम्बान्न लघुस्तथेदं ज्ञात्वेष्टकर्णः सुधिया प्रकल्प्यः ।

कर्णाश्रितं स्वल्पभुजैक्यम् उर्वी प्रकल्प्य, तच्छेषमितौ च वाहू प्रकल्प्य,
अवलम्बः तथा अन्यकर्णः साध्यः, श्रवणः स्वोर्व्याः कथञ्चित् दीर्घः न स्यात्
तथा अन्यलम्बान्न लघुः न स्यात्, इदं ज्ञात्वा इष्टकर्णः सुधिया प्रकल्प्यः ।

कर्ण के दोनों बगल में रहने वाले जिन दो भुजों का योग अल्प हो
उसको भूमि और शेष भुजों को भुज मानकर 'त्रिभुजे भुजयोयोगः' इस सूत्र
से लम्ब तथा 'इष्टोऽत्र कर्णः' इस सूत्र से अन्य कर्ण साधन करना चाहिये ।
इष्ट कर्ण की कल्पना इस तरह करनी चाहिये कि वह भूमि से अधिक औ

कर्णोभयतः स्थिते ये व्यस्ये तयोः फलैक्यम् अत्र नूनं फलं स्यात् ।
विपम चतुर्भुज में कर्ण के दोनों तरफ के त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग करने से क्षेत्रफल होता है ।

उपपत्तिः—कर्णरेखया विभक्तस्य विपमचतुर्भुजस्य फलं खण्डद्वयरूपयोस्त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोगसमं भवतीति किं चित्रम् ।

अनन्तरोक्तक्षेत्रान्तस्त्रयस्त्रयोः फले । ६२४।२३१० ।

अनयोरेक्यं ३=३४ तस्य फलम् ।

उदाहरण—पूर्वोक्त चतुर्भुज में भूम्यर्ध $\frac{७७}{२}$ को लम्ब २४ से गुणा करने पर $७७ \times १२ = ९२४$ प्रथम त्रिभुज का फल हुआ और उसी भूम्यर्ध को लम्ब ६० से गुणा करने पर $\frac{७७}{२} \times ६० = ७७ \times ३० = २३१०$ हुआ । दोनों का योग = $९२४ + २३१० = ३२३४$ विपम चतुर्भुज का फल हुआ ।

समानलम्बस्यावाधादिज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

समानलम्बस्य चतुर्भुजस्य मुखोनभूमिं परिकल्प्य भूमिम् ।

भुजौ भुजौ व्यस्यवदेव साध्ये तस्यावधे लम्बमितिस्ततश्च ॥३०॥

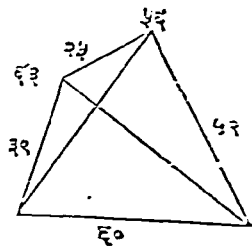
आवाधयोना चतुरस्रभूमिस्तल्लम्बवर्गैक्यपदं श्रुतिः स्यात् ।

समानलम्बे लघुदोः कुयोगान्मुखान्यदोः संयुतिरल्पिका स्यात् ॥

समानलम्बस्य चतुर्भुजस्य मुखोनभूमिं भूमिं परिकल्प्य भुजौ भुजौ परिकल्प्य तस्य अवधे व्यस्यवत् एव साध्ये ततः लम्बमितिः च साध्या । आवाधयोना चतुरस्रभूमिः या तल्लम्बवर्गैक्यपदं श्रुतिः स्यात् । समानलम्बे (चतुर्भुजे) लघुदोः कुयोगात् मुखान्यदोः संयुतिः अल्पिका स्यात् ।

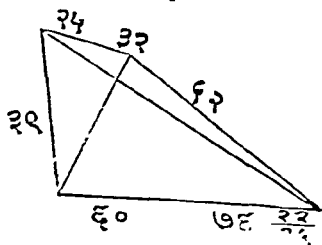
समान लम्ब वाले चतुर्भुज की भूमि में मुख घटा कर भूमि और दोनों भुजों को भुज मान कर उसकी आवाधायें और लम्ब 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इत्यादि सूत्र के अनुसार साधन करें । चतुर्भुज की भूमि में आवाधा को घटा कर शेष और लम्ब का वर्ग योग मूल कर्ण होता है । समलम्ब चतुर्भुज में लघु भुज और भूमि के योग से मुख और अन्यभुज का योग अल्प होता है ।

न्यासः । अत्र बृहत्कर्णं त्रिपष्टि-
भितं प्रकल्प्य जातः प्राग्बदन्यः कर्णः
५६ । अथ पट्पञ्चाशत्स्थाने द्वात्रिंश-
न्मितं कर्णं ३२ प्रकल्प्य प्राग्बत्साध्य-
माने कर्णे ।



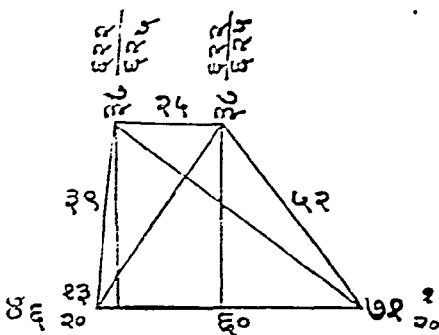
न्यासः ।

जातं करणीखण्डद्वयं ६२१ ।
२७०० । अनयोर्मूलयो २४३३ ।
५१३३ । रैक्यं द्वितीयः कर्णः
७६३३ ।



अथ तदेव क्षेत्रं चेत्समलम्बम् ।

न्यासः ।



तदा मुखो-
नभूमि परि-
कल्प्य भूमि-
मितिज्ञानार्थ-
यन्त्रं कल्पि-
तम् ।

समलम्ब का उदाहरण

यहाँ भूमि = ६० और मुख = २५, अतः मुखोन्भूमि = ६० - २५ = ३५ भूमि, दोनों भुज ३९।५२ अब 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस सूत्र से छोटी आवाधा $\frac{३}{६}$ और बड़ी आवाधा $\frac{१७३}{६}$ तथा लम्ब वर्ग = $\frac{३६०१६}{६}$ ।

अब २५ इष्ट मान कर $\frac{३६०१६}{६}$ का आसन्न मूल $३६\frac{६३३}{६}$ हुआ ।

अब 'आवाधयोना चतुरस्रभूमिः' इस सूत्र के अनुसार $६० - \frac{३}{६} = \frac{३००-३}{६} = \frac{२९७}{६}$ के वर्ग $\frac{८६३०३}{६}$ में लम्ब वर्ग $\frac{३६०१६}{६}$ को जोड़ कर $\frac{८६३०३}{६} + \frac{३६०१६}{६} = \frac{१२२३१९}{६} = ५०४९$ का आसन्न मूल २० इष्ट मान कर लेने से $७१\frac{३}{६}$ एक कर्ण हुआ । इसी तरह दूसरी आवाधा $\frac{१७३}{६}$ को भूमि में घटा कर शेष ($६० - \frac{१७३}{६}$) = $\frac{१२६}{६}$ के वर्ग $\frac{१६३६५}{६}$ में लम्ब वर्ग $\frac{३६०१६}{६}$ को जोड़ने से २१७६ हुआ । इसका आसन्न मूल $४६\frac{३}{६}$ दूसरा कर्ण हुआ । इस तरह चतुर्भुज में भुजाओं के मान स्थिर रहने पर भी अनेक प्रकार के कर्ण होते हैं ।

एवमनियतत्वेऽपि नियतावेव कर्णावानीती ब्रह्मगुप्ताद्यैस्तदानयनं यथा ।

कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योऽन्यभाजितं गुणयेत् ।

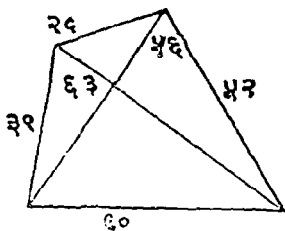
योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णो पदे विपमे ॥

उभयथा कर्णाश्रितभुजघातैक्यं भुजप्रतिभुजवधयोः योगेन गुणयेत्, अन्यो-
न्यभाजितं पदे, विपमे (चतुर्भुजे) कर्णो स्याताम् ।

विपम चतुर्भुज में कर्णाश्रित दो दो भुजाओं के घात का योग कर उनको अलग-अलग रखें । बाद में सम्मुखस्थ भुजद्वय घातों के योग से गुणा कर द्वितीय कर्णाश्रित भुजद्वय के घातों के योग से भाग दें, तो प्रथम कर्ण और प्रथम कर्णाश्रितभुजद्वय के घातों के योग से भाग देने पर द्वितीय कर्ण होता है ।

उपपत्तिः—कल्प्यते अ क ग घ वृत्तान्तर्गतं चतुर्भुजं यस्य भुजाः अ क = अ, क ग = क, ग घ = ग, घ अ = घ तथा अ ग, क घ कर्णौ । वृत्तान्तर्गत-
चतुर्भुजे सम्मुखकोणयोर्योगस्य समकोणद्वयसमत्वेन $\angle अ + \angle ग = १८०^\circ$,

न्यासः ।



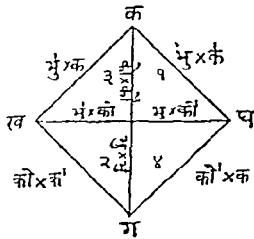
कर्णाश्रितभुजघातेति एकवारम-
नयो २५३६ घातः ६७५ तथा ५२।६०
अनयोर्घातः ३१२० । घातयोर्द्वयोरैक्यम्
४०६५ तथा द्वितीयवारं २५।५२ अन-
यर्घाते जातं १३०० । तथा ३६।६० ।
अनयोर्घाते जातं २३४० घातयोर्द्वयोरै-

क्यं ३६४० । एतद्वैक्यं भुजप्रतिभुजयोः ५२।३६ । घातः २०२८ पश्चात्
२५।६० अनयोर्बन्धः १५०० तयोरैक्यं ३५२८ । अनेनैक्येन २६४० गुणि-
तं जातं पूर्वैक्यं १२८४१६२० । प्रथमकर्णाश्रितभुजघातैक्येन ४०६५ भक्तं
लब्धं ३१३६ । अस्य मूलं ५६ । एककर्णस्तथा द्वितीयकर्णार्थं प्रथमकर्णा-
श्रितभुजघातैक्यं ४०६५ । भुजप्रतिभुजवधयोग ३५२८ गुणितं जातं
१४४४७१६० । अन्यकर्णाश्रितभुजघातैक्येन ३६५० । भक्तं लब्धं ३६६६ ।
अस्य मूलं ६३ द्वितीयः कर्णः । अस्मिन् विषये क्षेत्रकर्णसाधने अस्य
कर्णानयनस्य प्रक्रियागौरवम् ।

उदाहरण—एक कर्ण के आश्रित २५ और ३९ का घात ९७५ तथा
५२ और ६० का घात ३१२० हुए । दोनों का योग ४०९५ हुआ । द्वितीय
कर्ण के आश्रित भुजद्वय २५।५२ का घात १३०० एवं ३९ और ६० का घात
२३४० हुए । इन दोनों का योग ३६४० हुआ । सम्मुख स्थित दो-दो भुजाओं
का घात करने पर क्रम से $५२ \times ३९ = २०२८$ और $२५ \times ६० = १५००$ हुए ।
इन दोनों का योग $२०२८ + १५०० = ३५२८$ हुआ । इससे द्वितीयकर्णाश्रित
भुजघातैक्य ३६४० को गुणा करने से १२८४१६२० हुआ । इसे प्रथमकर्णा-
श्रितभुजघातैक्य ४०६५ से भाग दिया तो लब्धि ३१३६ का वर्गमूल ५६
प्रथम कर्ण हुआ । अब प्रथमकर्णाश्रितभुजघातैक्य ४०६५ को भुज प्रतिभुज
वध योग ३५२८ से गुणा किया तो १४४४७१६० हुआ । इसको अन्यकर्णा-
श्रितभुजघातैक्य ३६५० से भाग दिया तो लब्धि ३९६९ का मूल ६३ दूसरा
कर्ण हुआ । ब्रह्मगुप्तादि आचार्यों की यह रीति बहुत विस्तार से है, अतः लघु
रीति से कर्णानयन की रीति आगे कही गई है ।

द्वितीयस्य भुजकोटिकर्णाः पृथक्-पृथक् गुण्यन्ते तदा जात्यद्वयं स्यादेवं द्वितीय-
जात्यस्य भुजकोटिभ्यां प्रथमस्य भुजकोटिकर्णा यदि गुण्यन्ते तदापि जात्यद्वयं
स्यात् । एवमुत्पन्नानि चत्वारि जात्यत्रिभुजानि मियः सजातीयानि । अथैषां
योगेनैकं विपमचतुर्भुजं जायते तत्राचार्योक्तं कर्णमानं स्पष्टं स्यात् । यथोदाह-
त्योच्यते त्रिभुजानां स्वरूपाणि—

१	त्रिभुजस्य भुजकोटिकर्णाः क्रमेण	भु × भु', भु × को', भु × क'
२	" "	" को × भु', को × को', को × क'
३	" "	" भु' × भु, भु' × को, भु' × क
४	" "	" को' × भु, को' × को, को' × क



अत्र १ म \triangle भुज = ३ य \triangle भु ।

१ म \triangle को = ४ \triangle भु । २ य \triangle को = ४

\triangle को । अतस्तुल्यभुजकोटीनां तुल्योपरि

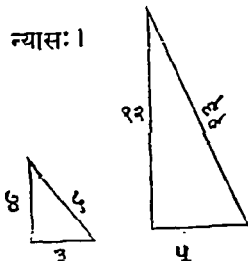
स्थापनेन क ख ग घ विपमचतुर्भुजं सजातमस्य

स्वरूपदर्शनेनैवाभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः परस्परं

कर्णहताः इत्यादि पद्यमुपपद्यते ।

जात्यक्षेत्रद्वयम् ।

न्यासः ।



एतयोरितरेतरकर्महता भुजाः कोटयः

भुजा इति कृते जातं २५ । ६० । ५२ । ३६ ।

तेषां महती भूर्लघु मुखमितरौ बाहु इति

प्रकल्प्य क्षेत्रदर्शनम् इमौ कर्णौ महतायासेना-

नीतौ ६३ । ५६ । अस्यैव जात्यद्वयस्योत्तरो-

त्तरभुजकोट्योर्घातौ जातौ ३६ । २० अन-

योरैक्यमेकः कर्णः ५६ । बाहोः ३ । ५ ।

कोट्योश्च । ४ । १२ । घातौ १५ । ४८ । अनयोरैक्यमन्यः कर्णः ६३ ।

एवं श्रुती स्याताम् । एवं सुखेन जाते ।

उदाहरण

(१) किसी विषमकोण समचतुर्भुज के कर्ण ७२ फी० और ९६ फी० हैं, तो उसका क्षेत्रफल और भुजा की लम्बाई बताओ ।

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{क \times क'}{४} \quad | \quad \text{यहाँ क} = ७२ \text{ फी० तथा क}' = ९६ \text{ फी० ।}$$

$$\therefore \text{अर्थात् क्षेत्रफल} = \frac{७२ \times ९६}{४} \text{ व० फी०} = ७२ \times २४ \text{ व० फी०} = ३२ \times २६ \text{ व० फी०}$$

$$\text{विषमकोणसमचतुर्भुज की भुजा} = \sqrt{\frac{क^२ + क'^२}{२}} = \sqrt{\frac{७२ \times ७२ + ९६ + ९६}{२}}$$

$$= \sqrt{१८ \times ७२ + २४ \times ९६} = \sqrt{१२४ (९ + १६)} = \sqrt{१२४ \times २५}$$

$$= १२ \times ५ = ६० \text{ फी० ।}$$

(२) किसी विषमकोण समचतुर्भुज की भुजा २५ गज और उसका एक कर्ण ४० गज हैं, तो उसका दूसरा कर्ण और क्षेत्रफल बताओ ।

$$\text{यहाँ दूसरा कर्ण} = \sqrt{४ \text{ भुज}^२ - \text{कर्ण}^२} = \sqrt{४ \times २५^२ - ४०^२} \text{ गज}$$

$$= \sqrt{४ \times ६२५ - १६००} = \sqrt{२५०० - १६००} = \sqrt{९००} = ३० \text{ गज ।}$$

$$\text{अब क्षेत्रफल} = \frac{४० \times ३०}{४} \text{ व० ग०} = २० \times ३० \text{ व० ग०} = ६०० \text{ व० ग० ।}$$

(३) एक विषमकोण समचतुर्भुज के कर्ण ३० इंच और १६ इंच हैं, तो उसका क्षेत्रफल, भुजायों तथा ऊँचाई का मान बताओ । यहाँ क्षेत्रफल

$$= \frac{३० \times १६}{४} = ३० \times ८ = २४० \text{ व० इ० ।}$$

$$\text{भुजा} = \sqrt{\frac{३०^२ + १६^२}{२}} = \sqrt{\frac{९०० + २५६}{२}} = \sqrt{२२५ + ६४} = \sqrt{२८९}$$

$$= १७ \text{ इंच ।}$$

$$\therefore \text{चारों भुजाओं का योग} = ४ \times १७ = ६८ \text{ इंच ।}$$

$$\text{ऊँचाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{भुजा}} = \frac{२४०}{१७} \text{ इंच} = १४ \frac{२}{१७} \text{ इंच ।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) किसी विषमकोण समचतुर्भुज के कर्ण ८८ गज और २३४ गज हैं, तो उसके क्षेत्रफल, भुजा और लम्ब बताओ ।

(२) किसी विषमकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ३५४१४४ व० फी० और उसका एक कर्ण ६७२ फी० है, तो उसका दूसरा कर्ण, भुजा और ऊँचाई का मान बताओ ।

वर्ग का क्षेत्रफल = भु^२ । यहाँ भु = २ गज २ फी० ३ इञ्च =
 $२ + \frac{२\frac{१}{४}}{३}$ गज = $\frac{२ + \frac{१}{२}}{३}$ गज = $२ + \frac{१}{६}$ गज = $२ + \frac{१}{६}$ गज = $\frac{१३}{६}$ गज
 \therefore अभीष्ट क्षेत्रफल = $(\frac{१३}{६})^2 = \frac{१६९}{३६}$ व० ग० = ७ व० ग०
 ५ व० फी० ९ व० इ०

(२) किसी आयत की लम्बाई १५ गज और चौड़ाई ८ गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई \times चौड़ाई = १५ \times ८ = १२० व० ग० ।

(३) किसी आयत का क्षेत्रफल २०८ वर्ग फीट है । यदि उसकी लम्बाई १६ फीट हो, तो उसकी चौड़ाई बताओ ।

आयत की चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}} = \frac{२०८}{१६}$ फी० = १३ फी० ।

(४) किसी घर की सतह का क्षेत्रफल ३४० वर्ग गज है । यदि उसकी चौड़ाई १७ गज हो, तो उसकी लम्बाई बताओ ।

लम्बाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}} = \frac{३४०}{१७}$ गज = २० गज ।

(५) एक वर्ग का क्षेत्रफल ७ वर्ग फीट १६ वर्ग इञ्च है, तो उसकी भुजा बताओ ।

वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$ । यहाँ क्षेत्रफल = ७ व० फी० १६ व० इ० = १०२४ व० इ० । \therefore अभीष्ट भुजा = $\sqrt{१०२४} = ३२$ इञ्च ।

(६) किसी वर्ग का क्षेत्रफल १४ व० फी० ९ व० इ० है, तो उसका भुजयोग बताओ ।

वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$ । यहाँ क्षेत्रफल = १४ व० फी० ९ व० इ० = २०२५ व० इ० । \therefore भुजा = $\sqrt{२०२५} = ४५$ इ० ।

\therefore अभीष्ट वर्ग की चारो भुजाओं का योग = ४५ \times ४ = १८० इ० = १५ फीट ।

(७) एक आयताकार कपड़े की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दूनी है । यदि उसका क्षेत्रफल ४६०८ वर्ग इञ्च हो, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ ।

$$४ \text{ पे० }) \times \frac{२६०}{३} = १\frac{१}{३} \times \frac{२६०}{३} \text{ शि०} = \frac{२६० \times २६०}{९} \text{ पौ०} = \frac{१६ \times १५}{९} \\ \text{पौ०} = \frac{२६५}{९} \text{ पौ०} = २९ \text{ पौ० } १७ \text{ शि० } ९\frac{१}{३} \text{ पे० ।}$$

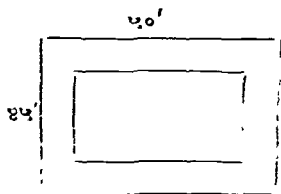
(११) किसी मकान की लम्बाई ३० फीट ६ इञ्च, चौड़ाई २० फीट और ऊँचाई १२ फीट है, तो उसका चारों दीवारों को रंगने का खर्च २ आ० प्रति वर्ग फुट की दर से बताओ ।

$$\text{चारों दीवारों का क्षेत्रफल} = २ \text{ ऊँचाई (लम्बाई + चौड़ाई)} = २ \times १२ \\ (३० \text{ फी० } ६ \text{ इञ्च} + २० \text{ फी० }) = २९ (३०\frac{१}{३} + २०) \text{ व० फी०} \\ = \frac{२५ \times १०९}{३} \text{ व० फी०} = १२ \times १०९ \text{ व० फी०} = १२१२ \text{ व० फी०}$$

$$\therefore \text{दीवारों को रंगने का खर्च} = १२१२ \times २ \text{ आना} = २४२४ \text{ आना} \\ = \frac{२५ \times २५}{३} \text{ रु०} = १५१ \text{ रु० } ८ \text{ आ० ।}$$

नोट—छात्रों को यह ध्यान रखना चाहिये कि चारों दीवारों का क्षेत्रफल = २ ऊँचाई (लम्बाई + चौड़ाई)

(१२) एक आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ५० फीट और ४५ फीट हैं । इसके भीतर चारों तरफ ६ फीट चौड़ा एक रास्ता है, तो रास्ते का क्षेत्रफल निकालो ।



$$\begin{aligned} \text{मैदान का क्षेत्रफल} &= ५० \times ४५ \text{ व० फी०} \\ &= २२५० \text{ व० फी०} \end{aligned}$$

रास्ते को छोड़ कर मैदान की लम्बाई = $(५० - २ \times ६)$ फी०

$$= ५० - १२ = ३८ \text{ फी० ।}$$

रास्ते को छोड़ कर मैदान की चौड़ाई = $(४५ - २ \times ६)$ फी०

$$= ४५ - १२ = ३३ \text{ फी० । } \therefore \text{रास्ते का क्षेत्रफल} = ३८ \times ३३ \text{ व० फी०} = १२५४ \text{ व० फी० ।}$$

$$\therefore \text{रास्ते का क्षेत्रफल} = २२५० \text{ व० फी०} - १२५४ \text{ व० फी०} = ९९६ \text{ व० फी० ।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

- (१) एक आयत की लम्बाई १६ फीट और चौड़ाई १५ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।
- (२) एक आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ५ गज २ फीट ३ गज १ फुट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

- (१९) किसी वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल २०५ एकड़ है, तो उसकी भुजा बताओ ।
- (२०) किसी आयताकार खेत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से ४ गुनी है । यदि उसका क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ एकड़ हो, तो लम्बाई और चौड़ाई अलग-अलग बताओ ।
- (२१) किसी वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ४९० एकड़ है, तो उसके चारों तरफ घूमने में ४ माइल प्रति घण्टे की दर से कितना समय लगेगा ।
- (२२) एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ६०४ एकड़ है, तो उसके चारों तरफ घूमने में ५ माइल प्रति घण्टे की दर से कितना समय लगेगा ।
- (२३) एक वर्गाकार झील का क्षेत्रफल १० एकड़ है, तो दो माइल का चक्कर लगाने के लिये उसके चारों तरफ कितनी बार घूमना पड़ेगा ।
- (२४) किसी वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल १ एकड़ २३८५ व० ग० है । तो इसको चारों तरफ से घेरने में १ शि० ५ पे० प्रति गज की दर से क्या खर्च लगेगा ।
- (२५) एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल २२०५ एकड़ है, तो उसको चारों ओर से घेरने में प्रति गज १ र० ८ आ० की दर से कितना खर्च लगेगा ।
- (२६) किसी वर्गाकार उद्यान को चारों तरफ से घेरने में प्रति गज १ र० ४ आने की दर से २२० र० खर्च होता है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।
- (२७) किसी आयताकार घास के मैदान की लम्बाई, उसकी चौड़ाई का ३ है । यदि उसमें प्रति वर्ग गज ४ पे० की दर से घास लगाने का खर्च १४ पौ० ८ शि० होता है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ ।
- (२८) एक वर्गाकार मैदान में प्रति एकड़ २ पौ० १४ शि० ६ पे० की दर से २७ पौ० ५ शि० खर्च होता है, तो उसको चारों ओर से घेरने में ९ पे० प्रति गज की दर से क्या खर्च लगेगा ।
- (२९) किसी आयताकार खेत की मालगुजारी प्रति एकड़ ९ शि० ६ पे० की दर से ९५ पौ० होती है । यदि उसकी चौड़ाई ९३८ गज हो, तो उसकी लम्बाई बताओ ।

उसकी सतह में २७ इंच चौड़ी दरी विछाने का खर्च प्रति गज १ शि० ८ पे० की दर से बताओ ।

- (३८) किसी बरामदे की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ७० गज और ९ गज है, तो उसमें विछाने के लिये ५ इंच लम्बे और ४ इंच चौड़े पत्थर के टुकड़े कितने लगेंगे ।
- (३९) किसी कोठरी की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से ३७ फी० २ इंच, २५ फी० ८ इंच और २२ फी० ६ इंच है, तो उसकी चारों दीवारों को $1\frac{1}{2}$ गज चौड़े कागज से मढ़ने में प्रति गज १ शि० १ $\frac{3}{4}$ पे० की दर से कितना खर्च लगेगा ।
- (४०) किसी कोठरी की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से ३० फी०, २२ फी० और १८ $\frac{3}{4}$ फी० हैं । उसमें ५ दरवाजे और ३ खिड़कियाँ हैं । यदि प्रत्येक दरवाजा और खिड़की का क्षेत्रफल ३० व० फी० हो, तो दीवारों के शेष भागों को ३ आना प्रतिवर्ग गज की दर से रंगने का खर्च बताओ ।
- (४१) एक कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से २८ फी०, २० फी० और १० फीट हैं । इसमें एक दरवाजा, दो खिड़कियाँ और एक अग्नि स्थान (Fire place) हैं । यदि दरवाजे की ऊँचाई और चौड़ाई क्रम से ७ फी० और ४ फी०, प्रत्येक खिड़की की ऊँचाई और चौड़ाई क्रम से ५ फी० और ३ फी० तथा अग्निस्थान का क्षेत्रफल यदि १५ वर्ग फीट हैं, तो दीवार के शेष भागों में मढ़ने के लिये कागज की लम्बाई बताओ यदि उसकी चौड़ाई १ फी० ४ इंच हो ।
- (४२) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से ३५ फी०, २५ फी० और १० फी० है । ७ फी० ऊँचा और ६ फी० चौड़ा १ दरवाजा, तथा ६ फी० ऊँची और ४ फी० चौड़ी दो खिड़कियाँ और एक अग्निस्थान, जिसका क्षेत्रफल १८ व० फी० है, को छोड़कर दीवार के शेष भागों में २ फी० चौड़ा कागज लगवाने का खर्च प्रतिगज १० पेन्स की दर से बताओ ।
- (४३) किसी मकान की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से २० फी०

और उसकी सतह में ३० इंच चौड़ी दूरी विद्यमाने का क्षेत्र प्रति गज ३ ति० ३ पै हों, तो जगज और दूरी का क्षेत्र क्षेत्र बताओ ।

- (३९) एक वर्गाकार घास के मैदान की लम्बाई २०० गज है । इसके बाहर चारों तरफ १० फी० चौड़ा एक रास्ता है, तो रास्ते में कंकड़ विद्यमाने का क्षेत्र २ २० ८ आ० प्रति १०० व० फी० की दूर से क्या होगा ।
- (४०) किसी आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १०० फी० और ८० फी० हैं । इसके भीतर चारों तरफ ८ फी० चौड़ा एक रास्ता है, तो रास्ते का क्षेत्रफल और उसमें कंकड़ विद्यमाने का क्षेत्र ५ आ० ३ पा० प्रति वर्ग गज की दूर से बताओ ।
- (४१) एक वर्गाकार उद्यान का क्षेत्रफल १० एकड़ है । उद्यान के भीतर ५ फीट चौड़ा चारों तरफ रास्ता है, तो रास्ते की मरम्मत का क्षेत्र प्रति वर्ग फूट ३ आ० ६ पाई की दूर से बताओ ।
- (४२) किसी वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ४० एकड़ है । इसके बाहर चारों तरफ ३० फी० चौड़ी एक गली है, तो उस गली में विद्यमाने के लिये ३ कु० लम्बा और ९ इंच चौड़ा पत्थर का टुकड़ा कितना लगेगा ।
- (४३) एक आयताकार पुष्पोद्यान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से २१ गज और १० गज हैं । इसके बाहर चारों तरफ ६ फी० चौड़ा रास्ता है, तो रास्ते में पत्थर विद्यमाने का क्षेत्र प्रति वर्ग गज ५६ पा० की दूर से बताओ ।
- (४४) एक आयताकार घास का मैदान ३५ फी० लम्बा और १५ फी० चौड़ा है । इसके बाहर चारों तरफ ५ फी० चौड़ा रास्ता है, तो रास्ते का क्षेत्रफल बताओ ।
- (४५) एक घर की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से २२ फी० और १८ फी० हैं । इसके भीतर चारों तरफ दो फीट चौड़ी जगह काटी छोड़ कर बीच में विद्यमाने के लिये कितनी लम्बी दूरी की आवस्यकता होगी, यदि उसकी चौड़ाई २० इंच है । यदि प्रति गज का दाम ३ ति० ९ पै हो, तो दूरी विद्यमाने का क्षेत्र बताओ ।
- (४६) किसी कोठी की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से २० गज और २८ फी०

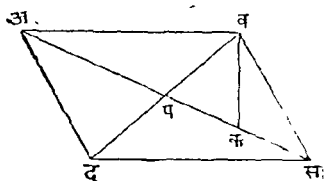
$$= \text{लम्ब} \times \text{आधार} \dots\dots\dots (१)$$

$$\therefore \text{समानान्तर चतुर्भुज का आधार} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्ब}} \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{और समानान्तर चतुर्भुज का लम्ब} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} \dots\dots\dots (३)$$

समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफलानयन का दूसरा प्रकार ।

मान लिया कि अ व स द एक समानान्तर चतुर्भुज है, जिसमें अ स कर्ण



के ऊपर सामने के कोण बिन्दु व से व क लम्ब खींचा गया है । \therefore अ स

कर्ण उक्त समानान्तर चतुर्भुज को दो बराबर भागों में बाँटता है । \therefore अ

व स द समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र

$$\text{फल} = २ \Delta \text{ अ व स} = \frac{२ \times \text{व क} \times \text{अ स}}{२} = \text{व क} \times \text{अ स} = \text{कर्ण} \times \text{लम्ब}' \dots\dots (१)$$

$$\therefore \text{समानान्तर चतुर्भुज का कर्ण} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्ब}'} \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{और लम्ब}' = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{कर्ण}} \dots\dots\dots (३)$$

अ व स द समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $२ \Delta \text{ अ व स}$ । यहाँ यदि अ व + व स + अ स = यो, तो 'सर्वदोर्युतिदलं' इस सूत्र के अनुसार $\Delta \text{ अ व स}$ का क्षेत्रफल =

$$\sqrt{\frac{\text{यो}}{२} \left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अ व} \right) \left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{व स} \right) \left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अ स} \right)} \therefore \text{अ}$$

$$\text{व स द समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = २ \sqrt{\frac{\text{यो}(\text{यो} - \text{अ व})(\text{यो} - \text{व स})(\text{यो} - \text{अ स})}{२}}$$

इससे यह स्पष्ट है कि यदि समानान्तर चतुर्भुज की संगति, भुजायें और एक कर्ण ज्ञात हो, तो उसका क्षेत्रफल आसानी से निकाला जा सकता है ।

उदाहरण

(१) किसी समानान्तर चतुर्भुज का आधार ७ फी० ४ इंच और उसकी ऊँचाई ३ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल निकालो ।

$$\text{यहाँ } \frac{1}{2} = \frac{14+11+13}{2} = \frac{38}{2} = 19$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रैभुजफल} &= 2\sqrt{21 \times (21-14) (21-11) (21-13)} \text{ वर्ग ग०} \\ &= 2\sqrt{21 \times 7 \times 10 \times 8} \text{ वर्ग ग०} = 2\sqrt{11760} \text{ वर्ग ग०} \\ &= 2\sqrt{7 \times 7 \times 6 \times 6 \times 2 \times 2} = 2 \times 7 \times 6 \times 2 \\ &= 168 \text{ वर्ग ग०।} \end{aligned}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न

निम्नलिखित समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ।

- (१) आधार २२ फीट और ऊँचाई १५ फीट।
- (२) आधार ३६ गज और ऊँचाई १३ गज।
- (३) आधार ९ इंच और लम्ब ११ इंच।

निम्न लिखित समानान्तर चतुर्भुज का आधार बताओ।

- (४) क्षेत्रफल ८०० वर्ग फीट और ऊँचाई २० फीट।
- (५) क्षेत्रफल ९४५ वर्ग गज और ऊँचाई २७ गज।
- (६) क्षेत्रफल ५ एकड़ और ऊँचाई ४८४ गज।
- (७) किसी समानान्तर चतुर्भुज का एक कर्ण ८५ फीट और सामने के कोण से उस कर्ण पर लम्ब १० फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (८) किसी समानान्तर चतुर्भुज की संगति भुजायें ६३ फीट और ७ फी० हैं। यदि उसका एक कर्ण ७३ फी० हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

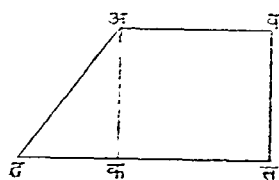
समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

हम लोग यह जानते हैं कि समलम्ब चतुर्भुज में दो सामने की भुजायें समानान्तर होती हैं। इसकी समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी को उँचाई या लम्ब कहते हैं। इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल, समानान्तर भुजाओं के योगार्ध तथा उँचाई के गुणनफल के बराबर होता है, यह सूत्र से स्पष्ट है।

$$\therefore \text{समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ उँचाई} \times \text{समानान्तर भुजाओं का योग}$$

$$\therefore \text{उँचाई} = \frac{2 \text{ क्षेत्रफल}}{\text{समानान्तर भुजाओं का योग}}$$

और दूसरी भुजा १३ फीट हो तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।



मान लिया कि अब स द एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें अ व = १२ फी०, द स = १७ फी०, अ द = १३ फी० । द क = द स — क स = द स — अ व = १७ — १२ = ५ फी० अब, अ द क समकोण त्रिभुज में

$$अक = \sqrt{अद^2 - दक^2} = \sqrt{१३^2 - ५^2} =$$

$$\sqrt{१६९ - २५} = \sqrt{१४४} = १२ \text{ फी०} = \text{समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी।}$$

$$\therefore \text{अर्भाष्ट समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{३}{२} \times १२ (१२ + १७) \text{ व० फी०} \\ = ६ \times २९ \text{ व० फी०} = १७४ \text{ व० फी०।}$$

(६) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें १५ फी० और १९ फी० हैं । यदि इसकी उँचाई ९ फी० हो, और इस उँचाई के मध्य बिन्दु से दो हुई भुजाओं के समानान्तर एक तीसरी रेखा खींची जाय, तो इस तरह दो भागों में बँटे हुए समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ ।

समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी को दो बराबर भागों में बाँटनी हुई उन भुजाओं की समानान्तर रेखा, उन भुजाओं के योगार्ध के समान होती है, अतः वह रेखा = $\frac{१५ + १९}{२} = \frac{३४}{२} = १७$ फी० ।

अब पहला समलम्ब चतुर्भुज दो समलम्ब चतुर्भुजों में बँट गया है, जिनकी समानान्तर भुजायें क्रम से १५ फीट, १७ फीट और १७ फीट, १९ फीट हैं । दोनों समलम्ब चतुर्भुज में समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी $\frac{९}{२}$ फीट है ।

$$\therefore \text{पहला समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{३}{२} (१५ + १७) \times \frac{९}{२} \text{ व० फी०} \\ = \frac{१६२}{२} \text{ व० फी०} = ८१ \text{ व० फी०।}$$

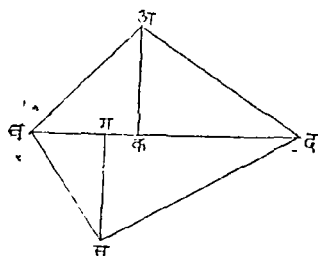
$$\text{दूसरा समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{३}{२} (१७ + १९) \times \frac{९}{२} \text{ व० फी०} \\ = \frac{२६१}{२} \text{ व० फी०} = १३०.५ \text{ व० फी०।}$$

(७) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें ३० फीट और ४४ फीट तथा अन्य भुजायें १३ फीट और १५ फीट हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

नान्तर भुजायें ६४ फी० और ३६ फी० हैं, तो उन भुजाओं के बीच की दूरी बताओ ।

- (५) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल १०० ब. ग. और उसका ऊँचाई २० गज हैं । यदि समानान्तर भुजाओं का अन्तर ६ गज हो, तो उनकी लम्बाई अलग-अलग बताओ ।
- (६) एक समलम्ब चतुर्भुजाकार मैदान का क्षेत्रफल ४६ एकड़ है । यदि समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी १२० गज तथा समानान्तर भुजाओं में से एक १० गज हो, तो दूसरी समानान्तर भुजा बताओ ।
- (७) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार उद्यान की समानान्तर भुजायें ७४ गज और ६० गज हैं । यदि उन भुजाओं के बीच की दूरी १२० गज हो, तो उस उद्यान में प्रति वर्ग गज ४ आने की दर से पत्थर विद्यमान का खर्च बताओ ।
- (८) एक समलम्ब चतुर्भुजाकार घर की समानान्तर भुजायें २० ग० और १० ग० हैं । यदि उन भुजाओं की दूरी १६ गज हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।
- (९) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें २८ फी० और १६ फी० हैं यदि निरखी भुजाओं में से एक की लम्बाई १५ फी० और दूसरी भुजा समानान्तर भुजाओं के ऊपर लम्ब हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।
- (१०) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें १६ फी० और २४ फी० हैं । यदि उसकी ऊँचाई २० फी० हो, और उस ऊँचाई के मध्यबिन्दु से समानान्तर भुजाओं के समानान्तर एक तीसरी रेखा खींची जाय, तो इस तरह दो भागों में बँटे हुए समलम्ब चतुर्भुज का अलग-अलग क्षेत्रफल बताओ ।
- (११) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार क्षेत्र का रकबा २ एकड़ है । यदि समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी २० गज हो, तो निरखी भुजाओं के मध्यबिन्दु की दूरी बताओ ।
- (१२) एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४७५ ब. फी० और समानान्तर

क्षेत्रफलों के विषय में कह कर अब सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफलानयन करते हैं। इस चतुर्भुज का नाम भास्कराचार्य ने विषम चतुर्भुज रखा है। उक्त चतुर्भुज का एक कर्ण और उस कर्ण पर सामने के कोणों से किये गये लम्ब ज्ञात हों, तो उसका क्षेत्र फल निम्न लिखित रूप से निकाला जाता है।



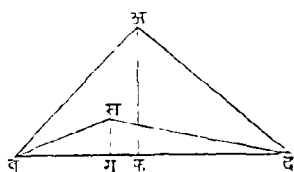
मान लिया कि अब स द एक चतुर्भुज है, जिसका एक कर्ण व द है। व द के ऊपर सामने के कोण $\angle अ$ और $\angle स$ से क्रम से अ क और स ग लम्ब हैं, तो चतुर्भुज अब स द का क्षेत्र फल = $\triangle अब द + \triangle व स द = \frac{1}{2} अ क \times व द + \frac{1}{2} स ग \times व द = \frac{1}{2} व द (अ क + स ग)$

$$= \frac{1}{2} \text{ कर्ण (प्रथम लम्ब + द्वितीय लम्ब)} \dots\dots\dots (१)$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \frac{२ \text{ क्षेत्र फल}}{\text{प्र. लम्ब} + \text{द्वि. लम्ब}} \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{और प्र. लम्ब} + \text{द्वि. लम्ब} = \frac{२ \text{ क्षेत्र फल}}{\text{कर्ण}} \dots\dots\dots (३)$$

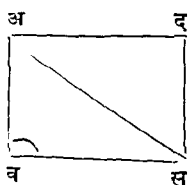
(२) ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसका एक कर्ण चतुर्भुज से बाहर हो।



अब स द चतुर्भुज में सम्मुख $\angle ब$ और $\angle द$ को मिलाने वाली व द कर्ण-रेखा चतुर्भुज से बाहर है। अ क और स ग सामने के कोण $\angle अ$ और $\angle स$ से क्रम से उस कर्ण पर लम्ब गिराया। चतुर्भुज अब स द का क्षेत्रफल = $\triangle अब द - \triangle व स द = \frac{1}{2} अ क \times व द - \frac{1}{2} स ग \times व द = \frac{1}{2} व द (अ क - स ग) = \frac{1}{2} \text{ कर्ण (लम्ब - लम्ब')} \dots\dots\dots (१)$

$$\triangle अब द = \frac{1}{2} अ क \times व द - \frac{1}{2} स ग \times व द = \frac{1}{2} व द (अ क - स ग) = \frac{1}{2} \text{ कर्ण (लम्ब - लम्ब')} \dots\dots\dots (१)$$

(३) ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसके कर्ण परस्पर लम्ब हों।



त्रिभुज अवस में कर्ण अस = $\sqrt{अव^2 + वस^2}$ ।
 अब त्रिभुज अदस में $\angle अदस = 90^\circ$,
 $\therefore अद = \sqrt{अस^2 - सव^2}$ । इस तरह उक्त
 चतुर्भुज की चारो भुजायें तथा एक कर्ण मालूम हो
 गये अतः उसका क्षेत्रफल आसानी से निकल
 सकता है ।

उदाहरण

(१) किसी चतुर्भुज का कर्ण १५ फीट और उस कर्ण पर सामने के कोणों से लम्ब के मान ११ फी० और ९ फी० हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।
 चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ कर्ण \times उस कर्ण पर सामने के कोणों से लम्बों का योग = $\frac{1}{2} \times 15 \times (11 + 9)$ व. फी० = $\frac{15 \times 20}{2}$ व. फी० = 15×10 व. फी० = १५० व. फी० ।

(२) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४८००० व. ग. और एक कर्ण पर सामने के कोणों से लम्ब २६५ गज और १३५ गज हैं, तो उस कर्ण की लम्बाई बताओ ।

$$\begin{aligned} \text{कर्ण} &= \frac{२ \text{ क्षेत्रफल}}{\text{सामने के कोणों से उस कर्ण पर लम्बों का योग}} = \frac{२ \times ४८००० \text{ ग.}}{२६५ + १३५ \text{ ग.}} \\ &= \frac{२ \times ४८०००}{४००} \text{ ग.} = २४० \text{ ग.} \end{aligned}$$

(३) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४ एकड़ और उसका एक कर्ण ४८४ गज है । यदि उस कर्ण पर सामने के कोणों से लम्बों का अन्तर २ गज हो, तो उन लम्बों का मान अलग-अलग बताओ ।

$$\begin{aligned} \text{लम्बों का योग} &= \frac{२ \text{ क्षेत्रफल}}{\text{कर्ण}} = \frac{२ \times ४ \times १०० \times १०}{४८४} \text{ गज} = २ \times ४ \times १० \text{ ग.} \\ &= ८० \text{ गज} \text{ । लम्बों का अन्तर} = २ \text{ गज,} \end{aligned}$$

\therefore एक लम्ब = $\frac{८० + २}{२} = ४१$ गज, और दूसरा लम्ब = $\frac{८० - २}{२} = ३९$ गज ।

(४) किसी चतुर्भुज के उस कर्ण की लम्बाई, जो उसके धरे से बाहर पड़ता है, २५ गज है और सामने के कोणों से उस कर्ण पर किये गये लम्बों का अन्तर १४ ग० है, तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ ।

- (१४) किसी चतुर्भुज की भुजायें ५, १२, १४ और १५ फी० हैं। यदि पहली दो भुजाओं से बना हुआ कोण समकोण हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (१५) अब स द चतुर्भुज की अब, स द और द अ भुजायें क्रम से ११२, १७५ और १०५ फी० हैं। यदि $\angle अबस = ९०^\circ = \angle दअस$ हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।
- (१६) अब स द चतुर्भुज में $\angle व$ और $\angle द$ प्रत्येक समकोण है। यदि अब, व स और स द भुजायें क्रम से ३६ फी०, ७७ फी० और ६८ फी० हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

अथ सूचीक्षेत्रोदाहरणम्

क्षेत्रे यत्र शतत्रयं क्षितिमितिस्तत्त्वेन्दुतुल्यं मुखं,
 बाहू खोत्कृतिभिः शरातिवृतिभिस्तुल्यां च तत्र श्रुती।
 एका खाष्टयमैः समा तिथिगुणैरन्याऽथ तल्लम्बको,
 तुल्यां गोवृतिभिस्तथा जिनयमैर्योगाच्छ्रवो लम्बयोः ॥
 तत्क्षण्डे कथयाधरे श्रवणयोर्योगाच्च लम्बावधे,
 तत्सूची निजमार्गवृद्धभुजयोर्योगाद्यथा स्यात्ततः।
 स्वावाधं वद लम्बक च भुजयोः सूच्याः प्रमाणे च के,
 सर्वं गाणितिक प्रचक्ष्य नितरां क्षेत्रेऽत्र दक्षोऽसि चेत ॥

जिस क्षेत्र में भूमि ३००, मुख १२५, प्रथम भुज २६०, द्वितीय भुज १२५, प्रथम कर्ण २८०, द्वितीय कर्ण ३१५, प्रथम लम्ब १८९ और द्वितीय लम्ब २२५ हैं, तो कर्ण और लम्ब के योग से उसके नीचे के दोनों मण्डों का प्रमाण एवं दोनों कर्ण के योग से लम्ब और आवाधाओं के मान तथा भुजों की अपने मार्ग में बढ़ाने से जहाँ योग होगा, वहाँ से भूमि पर आवाधा सहित लम्ब के मान एवं सूची क्षेत्र का प्रमाण बताओ।

अथ सन्ध्याद्यानपनाय करणमंत्रं वृत्तद्वयम्।

लम्बतदाश्रितवाहोर्मध्यं सन्ध्याख्यमस्य लम्बस्य।

सन्ध्यूना भूः पीठं साध्यं यस्याधरं खण्डम् ॥ ३४ ॥

$= \frac{४० \times २८०}{४६८} = ८०$ हुये । इसी तरह द्वितीय सन्धि १३२ को प्रथम लम्ब १८९ से गुणा कर प्रथम पीठ २५२ से भाग देने पर ९९ द्वितीय लम्ब का अधः खण्ड हुआ । एवं द्वितीय सन्धि १३२ को प्रथम कर्ण ३१५ से गुणा कर प्रथम पीठ २५२ से भाग देने पर कर्ण का अधः खण्ड १६५ हुआ ।

अथ कर्णयोर्योगादधो लम्बज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तम्
लम्बौ भूधौ निजनिजपीठविभक्तौ च वंशौ स्तः ।
ताभ्यां प्राग्बद्धृत्योर्योगाल्लम्बः कुखण्डे च ॥ ३६ ॥

भूधौ लम्बौ निजनिजपीठविभक्तौ च वंशौ स्तः ताभ्यां श्रुत्योः योगान् लम्बः कुखण्डे च प्राग्बद्ध साध्ये ।

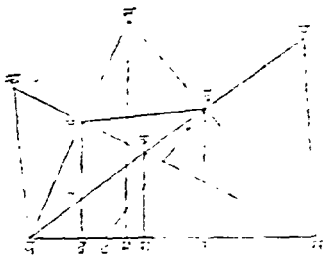
दोनों लम्बों को भूमि से गुणा कर अपनी-अपनी पीठ से भाग दें, तो वंशों का प्रमाण होता है । उन दोनों वंशों पर से 'अन्योन्यमूलाग्रसूत्रयोगात्' इत्यादि उक्त रीति से कर्णों के योग से भूमि पर लम्ब और आत्राधाओं का ज्ञान करना चाहिये ।

लम्बौ १८६ । २२४ । भू ३०० त्री जातो ५६७०० । ६७२०० ।
स्वस्वपीठाभ्यां २५२ । १६८ भक्तौ एवमत्र लब्धौ वंशौ २२५ । ४०० ।
आभ्यामन्योऽन्यमूलाग्रसूत्रयोगादित्यादिकरणेन लब्धः कर्णयोगादधो
लम्बः ११४ । भूखण्डे च १०८ । १६२ ।

उदाहरण—प्रथम लम्ब १८९ को भूमि ३०० से गुणा कर अपनी पीठ २५२ से भाग देने पर प्रथम वंश = २२५ हुआ, एवं द्वितीय लम्ब २२४ को भूमि ३०० से गुणा कर अपनी पीठ १६८ से भाग देने पर द्वितीय वंश ४०० हुआ । इन दोनों वंशों से 'वैर्णवोर्वधे योगहतेऽवलम्बः' इस सूत्र से दोनों वंशों के घात $२२५ \times ४०० = ९००००$ को वंशद्वय के योग ६२५ से भाग दिया, तो १४४ कर्णयोग से भूमि पर लम्ब हुआ । अत्र 'अर्भाष्टभूधौ वंशौ' इसके अनुसार दोनों वंशों को इष्ट भूमि ३०० से गुणा कर वंशों के योग ६२५ से भाग देने पर क्रम से प्रथम आत्राधा $= \frac{२२५ \times ३००}{६२५} = १०८$, और द्वितीय आत्राधा $= \frac{४०० \times ३००}{६२५} = १९२$ ।

उदाहरण—लम्ब २२४ की सन्धि १३२ को परलम्ब १८९ से गुणा कर अपने लम्ब २२४ से भाग दिया तो सम $\frac{१३२}{२२४}$ हुआ। इसमें परसन्धि १४८ को जोड़ने पर $\frac{१३२+१४८}{२२४}$ हार हुआ। सम $\frac{२८०}{२२४}$ और पर सन्धि ४८ को भूमि ३०० से गुणा कर दोनों जगह हार से भाग देने पर क्रम से $\frac{२८० \times ३००}{२२४} = \frac{३५६२५}{१४३}$ प्र. आवाधा और द्वि. आवाधा $= \frac{२८० \times ३०० \times १}{१४३ \times २२४} = \frac{३५६२५}{१४३}$ हुई। इसी तरह दूसरे लम्ब १८९ की सन्धि ४८ को परलम्ब २२४ से गुणा कर अपने लम्ब १८९ से भाग देने पर $\frac{४८}{१८९}$ दूसरा सम हुआ। इसको परसन्धि १३२ में जोड़ने से दूसरा हार $\frac{१८०}{१८९}$ हुआ। अब सम और पर सन्धि को भूमि से गुणा कर हार से भाग देने पर क्रम से प्र. आवाधा $= \frac{१८०}{१८९} \times \frac{३०० \times ३००}{१४३} = \frac{३५६२५}{१४३}$ और द्वि. आवाधा $= \frac{१८० \times ३०० \times १}{१४३ \times १८९} = \frac{३५६२५}{१४३}$ । अब परलम्ब २२४ को भूमि ३०० से गुणा कर हार $\frac{१४३}{२२४}$ से भाग देने पर सूची लम्ब $= \frac{३०० \times ३०० \times १}{१४३ \times २२४} = \frac{३५६२५}{१४३}$ । अब भुज १९५ और २६० को सूची लम्ब $\frac{३५६२५}{१४३}$ से गुणा कर अपने २ लम्ब १८९ और २२४ से भाग देने पर स्वनाम वदित सूची का प्रथम भुज $= \frac{१९५ \times ३५६२५}{१८९ \times १४३} = \frac{६२५००}{१४३}$ और द्वितीय भुज $= \frac{२६० \times ३५६२५}{२२४ \times १४३} = \frac{५००००}{१४३}$ । इस तरह बुद्धिमान उक्त रीतियों में हार को प्रमाण और गुण्य को फल एवं गुणक को इच्छा मान कर त्रैाशिक द्वारा सूची-त्रेण को सिद्ध करें।

अत्रोपपत्तिः—



अथ अ व द स चतुर्भुज
 व द, अ स कर्णों, अ इ = प्र-
 लम्बः। द उ = द्वि० लम्बः। व
 इ = आ सन्धिः। स इ = प्र-पीठम्।
 स उ = द्वि० सन्धिः। व उ = द्वि०
 पीठम्। अथ च न द, व द उ
 त्रिभुजयोः साजाभ्यादनुपातेन

$$\begin{aligned}
 व त &= \frac{व द \times व इ}{व उ} \\
 &= \frac{कर्ण \times आ \cdot स}{द्वि० पी०} । एवं त इ
 \end{aligned}$$

द्वाविंशतिभे विहतेऽथ शैलेः स्थूलोऽथवा स्याद्व्यवहारयोग्यः ॥४०॥

व्यासे भनन्दाग्निहते खवाणसूर्यैः विभक्ते सति या लब्धिः स सूक्ष्मः परिधिः स्यात् । अथवा द्वाविंशतिघ्ने व्यासे शैले विहते व्यवहारयोग्यः स्थूलः परिधिः स्यात् ।

व्यास को ३९२७ से गुणाकर १२५० से भाग देने पर सूक्ष्म-परिधि होती है । अथवा व्यास को २२ से गुणा कर ७ से भाग देने पर व्यवहार के योग्य परिधि का स्थूल-मान होता है ।

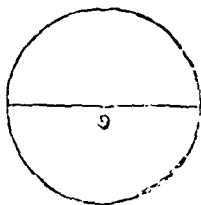
उपपत्तिः—ज्योत्पत्तिविधिना प्राचीनैश्चक्रकलापरिधौ तद्वृत्तव्यासमानं ६८७६ आनीतमतस्तद्विशेषेनानुपातेन रूपव्यासे परिधिः $\frac{३१६०० \times १}{६८७६} = \frac{३१६०० \times १०००००}{६८७६ \times १०००००} = \frac{३१६०० \times १०००००}{६८७६ \times १०००००} = \frac{२६०० \times १२५०}{६८७६ \times १२५०} = \frac{३२५० \times ३९२७}{६८७६}$ अत उपपन्नः सूक्ष्मः प्रकारः । अथ सू. प. = $\frac{३ \cdot \text{व्या.} \times ३९२७}{६८७६} = ३ \cdot \text{व्या} \times \left(\frac{३१६००}{६८७६} \right) = ३ \cdot \text{व्या} \left(३ + \frac{१}{६} \right)$ स्वल्पान्तरात् । ∴ स्थू. प. = $\frac{३ \cdot \text{व्या} \times २२}{७}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

विष्कम्भमानं किल सप्त यत्र तत्र प्रमाणं परिधेः प्रचक्ष्व ।
द्वाविंशतिर्यत् परिधिप्रमाणं तद्व्याससङ्ख्यां च सखे विचिन्त्य ॥१॥

हे मित्र ! जिस वृत्त का व्यास ७ है, उसकी परिधि बताओ, और जिस वृत्त की परिधि २२ है उसका व्यास बताओ ।

न्यासः ।



व्यासमानम् ७ । लब्धं परिधि
मानम् २१ $\frac{३१६००}{६८७६}$ स्थूला वा परि-
धिर्लब्धः २२ ।

$$\text{तथा त्रि} = \frac{प}{२ \pi} \dots\dots\dots (३)$$

उदाहरण

(१) किसी वृत्त का व्यास १ फी० ९ इञ्च है। यदि $\pi = \frac{३३}{७}$ हो तो उस वृत्त की परिधि बताओ।

$$\therefore प = \pi \times \text{व्या}। \text{ यहाँ व्यास} = १ \text{ फी० } ९ \text{ इ०} = २१ \text{ इ० तथा } \pi = \frac{३३}{७}$$

$$\therefore प = \frac{३३ \times २१}{७} \text{ इ०} = २२ \times ३ \text{ इ०} = ६६ \text{ इ०} = ५ \text{ फी० } ६ \text{ इ०।}$$

(२) किसी वृत्त का व्यासार्ध ४ ग० २ फी० है। यदि $\pi = \frac{३३}{७}$ तो उसकी परिधि बताओ।

$$\text{व्यासार्ध} = ४ \text{ ग० } २ \text{ फी०} = १४ \text{ फी०। अतः प} = २ \pi \times \text{त्रि} = \frac{२ \times २२ \times १४}{७} \text{ फी०}$$

$$= २ \times २२ \times २ \text{ फी०} = ८८ \text{ फी०} = २९ \text{ ग० } १ \text{ फु०।}$$

(३) एक वृत्त की परिधि ७७ गज है। यदि $\pi = \frac{३३}{७}$ हो तो उसका व्यास बताओ।

$$\therefore \text{व्या} = \frac{प}{\pi} = \frac{७७}{\frac{३३}{७}} \text{ ग०} = \frac{७७ \times ७}{३३} \text{ ग०} = \frac{५९}{३} \text{ ग०} = २४ \text{ ग० } १ \text{ फु० } ६ \text{ इ०।}$$

(४) किसी वृत्त की परिधि ८ फी० ३ इ० है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो तो उस वृत्त की त्रिज्या बताओ।

$$८ \text{ फी० } ३ \text{ इ०} = ९९ \text{ इ०। त्रि} = \frac{प}{२ \pi} = \frac{९९ \times ७}{२ \times २२} \text{ इ०} = \frac{९ \times ७}{४} \text{ इ०}$$

$$= \frac{६३}{४} \text{ इ०} = १५ \frac{३}{४} \text{ इ०।}$$

(५) किसी गाड़ी के पहिये का व्यास $४ \frac{३}{४}$ फी० है। यदि $\pi = \frac{३३}{७}$ हो, तो $५ \frac{३}{४}$ माइल जाने में वह कितना चक्कर लगावेगा।

पहिये की परिधि = $\pi \times \text{व्या} = \frac{३३}{७} \times (४ \frac{३}{४}) \text{ फी०} = \frac{३३}{७} \times \frac{३६}{४} \text{ फी०}$
 $= \frac{६६}{४} \text{ फी०}$, तो $\frac{६६}{४} \text{ फी०}$ पार करने में वह पहिया १ चक्कर लगाता है।
 अतः $५ \frac{३}{४}$ माइल याने $\frac{२६ \times १७६० \times ३}{४}$ फी० पार करने में वह पहिया
 $\frac{२६ \times १७६० \times ३}{४} \div \frac{६६}{४}$ चक्कर लगायेगा।

$$= \frac{२६}{६६} \times \frac{१७६० \times ३ \times ३}{४} = २०८० \text{ चक्कर।}$$

(६) एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या ९८ गज है। यदि $\pi = \frac{३३}{७}$ हो, तो प्रति गज ८ आने की दर से उसको घेरने में क्या खर्च होगा।

- (९) दो वृत्तों की त्रिज्याओं का योग ३५ गज और उनकी परिधियों का अन्तर ४४ गज हैं। यदि $\pi = \frac{22}{7}$ हो, तो परिधि का मान ज्ञान-अलग बताओ।

मान लिया कि दोनों वृत्तों की त्रिज्यायें क्रम से त्रि और त्रि' तथा उनकी परिधि क्रम से प और प' हैं, तो $p = 2\pi$ त्रि, और $p' = 2\pi \times$ त्रि'। $\therefore p + p' = 2\pi$ (त्रि' + त्रि) = $2\pi \times 35$ गज
 $= \frac{2 \times 22 \times 35}{7}$ गज = २२० गज। अत्र $p + p' = 220$ गज और $p - p' = 44$ गज। अतः संक्रमण गणित से $p = \frac{220 + 44}{2} = \frac{264}{2}$ गज
 $= 132$ गज और $p' = 220 - 132 = 88$ गज।

- (१०) किसी वृत्त की परिधि और व्यास का अन्तर ६० फी० है। यदि $\pi = \frac{22}{7}$ हो, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

मान लिया कि उस वृत्त की त्रिज्या = त्रि है, तो उसकी परिधि = $2\pi \times$ त्रि और व्यास = २ त्रि। अतः $p -$ व्या
 $= 2\pi \times$ त्रि - २ त्रि = २ त्रि ($\pi - 1$) = ६० फी०।

$$\therefore \text{त्रि} = \frac{60}{\pi - 1} \text{ फी०} = \frac{60}{\frac{22}{7} - 1} \text{ फी०} = \frac{60 \times 7}{22 - 7} \text{ फी०} = 4 \times 7 \text{ फी०} \\ = 28 \text{ फी०।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न (इस प्रश्नावली में $\pi = \frac{22}{7}$)

यदि वृत्त के व्यास निम्न लिखित हों, तो परिधि बताओ।

- (१) २१ इंच, (२) २ फी० ४ इंच, (३) १ फु० २ इंच, (४) ११ ग० २ फी०

यदि वृत्त की त्रिज्यायें निम्नलिखित हों, तो परिधि बताओ।

- (५) ३ फी० ६ इंच, (६) ४ गज, २ फी०, (७) ३ ग० १ फु० ६ इंच।
यदि वृत्तों की परिधि निम्नलिखित हों, तो व्यास बताओ।

- (८) ४४० फी०, (९) ५५० गज, (१०) ६ ग० ४ इंच।

- (११) किसी गाड़ी के पहिये का व्यास ५ फी० ३ इंच है, तो १ माइल की दूरी तय करने में यह कितना चक्कर लगायेगा।

वृत्तत्रेरे परिधिगुणितव्यासपादः फलं स्यात् । तत् फलं वेदैः दुग्गं तदा कन्दुकस्य जालम् इव गोलस्य उपरि परितः फलं स्यात् । एवं तदपि पृष्ठं फलं व्यासनिघ्नं पङ्क्तिः भक्तं गोलगर्भं नियतं घनाख्यं फलं स्यात् ।

परिधि को व्यास से गुणा कर ४ से भाग देने पर वृत्त का क्षेत्रफल होता है । उस क्षेत्रफल को ४ से गुणा करने से गोल का पृष्ठ-फल होता है । उस गोल पृष्ठफल को व्यास से गुणा कर ६ से भाग देने पर गोल का घनफल होता है ।

उपपत्तिः—‘वृत्तस्य पणवत्यंशो दण्डवद्वस्यते तु सः’ इत्युक्त्या वृत्तपरिधि

न महत्तमसंख्यया विभज्यैकः सूत्रम विभागः = $\frac{प}{न}$ । वृत्तव्यासार्थम् = $\frac{व्या}{२}$ ।

अथ प्रति विभागस्य ग्रान्तयोर्वृत्तकेन्द्रात्सूत्रे नेये तदा वृत्तकेन्द्रशीर्षात्मकानि न संख्यकानि समानानि समद्विबाहुकत्रिभुजानि येषु वृत्तस्य त्रिज्यारूपो भुजो, $\frac{प}{न}$ आघातश्च । तत्राधारस्यात्यल्पत्वाच्छीर्षविन्दोस्तदुपरिकृतो लम्बत्रिभुजस्य समपदानो लम्ब गुणं भूर्धर्ममित्यादिनैकस्य त्रिभुजस्य फलम् = $\frac{प}{२न} \times$ त्रि

= $\frac{प}{२न} \times \frac{व्या}{२} = \frac{प \times व्या}{४न}$ । इदं न संख्यया गुणितं तदा सर्वेषां त्रिभुजानो

फलं, तदेव वृत्तफल समनतः वृत्तफलम् = $\frac{प \times व्या}{४न} \times न = \frac{प \times व्या}{४}$ अत उपपन्नं

परिधिगुणितव्यासपादः फलमिति । अथ परिधिव्यासघातोऽतो गोलपृष्ठ फलं

भवेत्तेन गोलपृष्ठफल = $प \times व्या = \frac{प \times व्या \times ४}{४} =$ वृ क्षेत्र-फ. $\times ४$ एतेनोपपन्नं

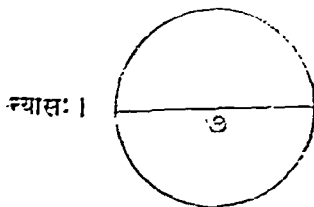
गोलपृष्ठफलानयनम् । अथ गोलघनफलार्थं कल्प्यते कापि महत्तम संख्या = न ।

अनया यदि गोलपृष्ठफलं विभज्यते तदैकभागस्य मानम् = $\frac{प \times व्या}{न}$ । ततो गोल-

केन्द्राप्रतिविभागस्य प्रति विन्दुगतानि त्रिज्यामूत्राणि नेयानि, तथा कृते न संख्यकानि तुल्यानि सूत्रीक्षेत्राणि जातानि । तत्र क्षेत्रफलं वेध गुणनित्यादि-

नैकस्य क्षेत्रस्य सम घनफलम् = $\frac{प \times व्या}{न} \times \frac{व्या}{२}$, (अथ न संख्याया महत्तमस्येन

गोलान्तर्गतघनफलदर्शनाय



व्यासः ७ ।

गोलस्यान्तर्गतं घनफलम्
१७२३३६६७ ।

उदाहरण—७ व्यास की परिधि उत्कर्षति से $\frac{22}{7} \times 7 = 22$ हुई । इसको व्यास ७ के चतुर्थांश से गुणा करने पर क्षेत्रफल $= \frac{22 \times 7}{2} = 77$ । अथवा स्थूल क्षेत्रफल $= \frac{22 \times 7 \times 7}{2} = 539$ । उक्त क्षेत्रफल को ३ से गुणा करने पर गोलपृष्ठफल $= 1617$ हुआ । इस पृष्ठफल को व्यास ७ से गुणा कर ३ से भाग देने पर गोलघनफल $= 1092 \frac{2}{3}$ ।

अथ प्रकारान्तरेण तत्फलानयने करणसूत्रं साद्वृत्तम् ।

व्यासस्य वर्गं भनवाग्निनिधने सूक्ष्मं फलं पञ्चसहस्रभक्ते ।

रुद्राहते शक्रहतेऽथवा स्यात् स्थूलं फलं तद्व्यवहारयोग्यम् ॥४२॥

घनीकृतव्यासदलं निजैकं विंशतिशतयुक्, गोलघनं फलं स्यात् ।

भनवाग्निनिधने व्यासस्य वर्गं पञ्चसहस्रभक्ते मति सूक्ष्मं फलं स्यात् । अथवा व्यासस्य वर्गं रुद्राहते शक्रहते मति तद्व्यवहारयोग्यं स्थूलं फलं स्यात् । घनीकृतव्यासदलं निजैकविंशतिशतयुक्, गोलघनं फलं स्यात् ।

व्यास के वर्ग को ३९२७ से गुणा कर ५००० में भाग देने पर सूक्ष्म फल होता है । एवं व्यास के वर्ग को ११ से गुणा कर १४ में भाग देने पर स्थूल फल होता है । व्यास के घन के आधे में उर्मी का २१ वाँ भाग जो देने पर घनफल होता है ।

$$\begin{aligned} \text{उपपत्ति:—सूक्ष्मपरिधि:} &= \frac{\text{व्या} \times ३९२७}{५०००}, \text{ अतः सूक्ष्म क्षेत्रफलम्} \\ &= \frac{\text{प} \times \text{व्या}}{४} = \frac{\text{व्या} \times ३९२७ \times \text{व्या}}{५००० \times ४} = \frac{\text{व्या}^2 \times ३९२७}{२००००} । \text{ अथ स्थूल} \\ \text{परिधि:} &= \frac{\text{व्या} \times २२}{७}, \text{ अतः स्थूलफलम्} = \frac{\text{व्या} \times \text{प} \times \text{व्या}}{४} \end{aligned}$$

∴ क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 196$ व० फी० = 22×28 व० फी० = ६१६ व० फी० ।

(२) किसी वृत्त का व्यास ५ फी० ३ इञ्च है । यदि $n = \frac{22}{7}$ हो तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

क्षेत्रफल = $n \times त्रि^2$ । यहाँ व्यास = ५ फी० ३ इञ्च = ६२ इञ्च,

∴ त्रि = $\frac{६२}{२}$ इ० । ∴ क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times \frac{६२}{२} \times \frac{६२}{२}$ व० इञ्च ।

= $\frac{११ \times ९ \times ६२}{२}$ व० इञ्च = $\frac{११ \times ९ \times ६२}{२}$ व० ग० = $\frac{६१६}{२}$ व० ग०

= २ व० ग० ३ व० फी० ९४ $\frac{१}{२}$ व० इ० ।

(३) किसी वृत्त का क्षेत्रफल ४ व० फी० ४० व० इ० है । यदि $n = \frac{22}{7}$ हो, तो उस वृत्त की त्रिज्या बताओ ।

वृत्त की त्रिज्या = $\sqrt{\frac{\text{वृ० क्षेत्रफल}}{n}}$ । यहाँ क्षेत्रफल = ४ व० फी०,

४० व० इ० = ६१६ व० इ० । ∴ त्रि $\sqrt{\frac{६१६}{\frac{22}{7}}}$ इञ्च = $\sqrt{\frac{६१६ \times ७}{२२}}$ इ०
= $\sqrt{२८ \times ७}$ इ० = $\sqrt{१९६}$ इ० = १४ इ० ।

(४) किसी वृत्त का क्षेत्रफल २४६४ व० फी० है । यदि $n = \frac{22}{7}$ हो, तो उसकी परिधि बताओ ।

(इस तरह के प्रश्न में पहले त्रिज्या का मान निकालना चाहिये ।)

वृत्त की त्रिज्या = $\sqrt{\frac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{n}} = \sqrt{\frac{२४६४ \times ७}{२२}}$ फी०

= $\sqrt{\frac{२४६४ \times ७}{२२}}$ फी० = $\sqrt{११२ \times ७}$ फी० = $\sqrt{१६ \times ७ \times ७}$ फी०
= ४ × ७ फी० = २८ फी० ।

∴ वृत्त की परिधि = $२n \times त्रि = २n \times २८$ फी० = $\frac{२ \times २२}{७} \times २८$
फी० = १७६ फी० ।

(५) दो समकेन्द्रिक वृत्तों की त्रिज्यायें १ फु० ९ इञ्च और १ फु० २ इञ्च हैं । यदि $n = \frac{22}{7}$ हो तो दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल बताओ ।

दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल = $n (त्रि + त्रि') (त्रि - त्रि')$ ।

यहाँ त्रि = १ फु० ९ इञ्च = २१ इञ्च, और त्रि' = १ फु० २ इञ्च ।

∴ क्षेत्रफल = $n (२१ + १४) (२१ - १४)$ व० इ० = $n \times ३५ \times ७$

व० इ० = $\frac{22}{7} \times ३५ \times ७$ व० इ० = २२×३५ व० इ० = ७७० व० इ० ।

$$\therefore \text{वृत्त की त्रिज्या} = \frac{\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}}{\pi} = \frac{\sqrt{28 \times 21 \times 21}}{22} \text{ फी०} = \frac{\sqrt{12546}}{22} \text{ फी०} = \frac{111.56}{22} \text{ फी०} = 5.07 \text{ फी०} \\ = \sqrt{8 \times 21 \times 21} \text{ फी०} = 2 \times 21 \text{ फी०} = 42 \text{ फी०} ।$$

(११) किसी मैदान में एक घोड़ा एक खूँटी में रस्सी से बँधा हुआ है, जिससे वह खूँटी के चारों तरफ १८५६ व. ग. में चर सकता है। यदि $\pi = \frac{22}{7}$ हो, तो रस्सी की लम्बाई बताओ।

रस्सी की लम्बाई उस वृत्ताकार भूमि की त्रिज्या है जिसमें घोड़ा चरता

$$\text{है। अतः त्रि} = \frac{\sqrt{\text{क्षे. फ.}}}{\pi} = \frac{\sqrt{28 \times 21 \times 21}}{22} \text{ ग०} = \frac{\sqrt{12546}}{22} \text{ ग०} \\ = \frac{111.56}{22} \text{ ग०} = 5.07 \text{ ग०} ।$$

\therefore रस्सी की लम्बाई = ५.०७ ग०।

(१२) एक वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{1216}$ फी० है। यदि इस वृत्त का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो और $\pi = \frac{22}{7}$ हो, तो वर्ग की भुजा बताओ।

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi \times \text{त्रि}^2 = \pi \times 1216 \text{ व. फी.} \\ = \frac{22}{7} \times 1216 \text{ व. फी.} = 22 \times 174 \text{ व. फी.} । \therefore \text{वृ. का क्षे. फ.} \\ = \text{वर्ग का क्षेत्रफल} \therefore \text{वर्ग का क्षेत्रफल} = 22 \times 174 \text{ व. फी.} । \\ \therefore \text{वर्ग की भुजा} = \sqrt{22 \times 174} \text{ फी.} = 11 \times 14 \text{ फी.} = 154 \text{ फी.} \\ = 22 \text{ ग० उत्तर।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न

(इस प्रश्नावली में $\pi = \frac{22}{7}$)

उन वृत्तों का क्षेत्रफल बताओ जिनकी त्रिज्या निम्नलिखित है।

- (१) २ गज ३ इंच।
- (२) २ फी० ३ इंच।
- (३) १८ ग० १ फी०।
- (४) ८ ग०।

उन वृत्तों की त्रिज्या बताओ, जिनका क्षेत्रफल निम्नलिखित है।

- (५) १५४०० व. ग०।

- (१९) एक वृत्त का क्षेत्रफल १५४०० व. फी. है, तो उसकी परिधि बताओ ।
- (२०) किसी वृत्ताकार तालाब का क्षेत्रफल १३२०० व. ग. है, तो उसकी त्रिज्या बताओ ।
- (२१) एक घासदार मैदान में किसी छुट्टी में एक रस्सी से एक घोड़ा इस तरह बँधा है कि वह छुट्टी के चारों तरफ २४६३ व. ग. भूमि में चर सकता है, तो रस्सी की लम्बाई बताओ ।

शरजीवानयनाय करणसूत्रं सार्द्धवृत्तम् ।

व्याव्यासयोगान्तरघातमूलं व्यासस्तदूनो दलितः शरः स्यात् ॥

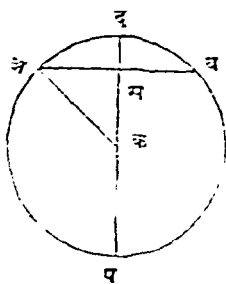
व्यासाच्छरोनाच्छरसंगुणाच्च मूलं द्विनिम्नं भवतीह जीवा ।

जीवार्धवर्गे शरभक्तयुक्ते व्यासप्रमाणं प्रवदन्ति वृत्ते ॥

व्याव्यासयोगान्तरघातमूलं यत् तदूनः व्यासः दलितः शरः स्यात् । शरोनात् व्यासात् शरसंगुणात् मूलं द्विनिम्नं इह जीवा भवति । जीवार्धवर्गे शरभक्तयुक्ते सति वृत्ते व्यासप्रमाणं प्रवदन्ति ।

जीवा और व्यास के योग और अन्तर के गुणनफल के मूल को व्यास में घटाकर आधा करने से शर होता है । एवं व्यास और शर के अन्तर को शर से गुणाकर उसके मूल को द्विगुणित करने पर जीवा होती है । जीवा के आधे के वर्ग में शर से भाग देकर लब्धि जो हो उसमें शर जोड़ने से वृत्त का व्यास होता है ।

उपपत्ति:—अ व = जीवा । अत्र जीवा शब्देन पूर्णज्या बोध्या । क = गुण केन्द्रम् । स द = शरः, द प = वृत्तव्यासः । अ व रेणोपरि क बिन्दोः क म लम्बः । अथ अ क म त्रिभुजे क म = $\sqrt{अ क^2 - अ म^2}$



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{अ क^2 - अ म^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{व्या}{२}\right)^2 - \left(\frac{शर}{२}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{व्या}{२} + \frac{शर}{२}\right) \left(\frac{व्या}{२} - \frac{शर}{२}\right)} \\
 &= \sqrt{\frac{व्या + शर}{२} \frac{व्या - शर}{२}} \\
 &= \frac{१}{२} \sqrt{(व्या + शर)(व्या - शर)} = म
 \end{aligned}$$

हुआ। शर १ को व्यास में घटाकर शेष (१० - १) = ९ को शर १ से गुणा कर मूल लेने पर ३ हुआ। इसे २ से गुणा करने पर ६ जीवा हुई। जीवार्ध ३ के वर्ग ९ में शर १ से भाग देने पर लब्धि ९ में शर १ को जोड़ने से १० व्यास हुआ।

परिशिष्ट

‘ज्याव्यासयोगान्तरघातमूलम्’ इस सूत्र के अनुसार

$$\text{शर} = \frac{\text{व्या} - \sqrt{\text{व्या}^2 - \text{पूज्या}^2}}{२} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{पूज्या} = २\sqrt{\text{श} (\text{व्या} - \text{श})} \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{और व्यास} = \frac{(\text{पूज्या})^2}{\text{श}} + \text{श} \dots\dots\dots (३)$$

अभ्यासार्थ उदाहरण

(१) किसी वृत्त की त्रिज्या १५ गज है। यदि उससे एक चाप की ऊँचाई ३ गज हो तो उसकी पूर्णज्या का मान बताओ। (जिसका नाम भास्कराचार्य ने शर रखा है, वही चाप की ऊँचाई कहलाती है।

यहाँ शर = ३ गज और त्रि = १५ है। अतः पूज्या = $२\sqrt{\text{श} (\text{व्या} - \text{श})}$
 $= २\sqrt{३ (३० - ३)}$ ग० = $२\sqrt{३ \times २७}$ ग० = १८ गज।

(२) एक चाप की पूर्णज्या १२ फी० और उस चाप की ऊँचाई ४ फी० है, तो उस वृत्त का व्यास बताओ।

$$\text{व्या} = \frac{(\text{पूज्या})^2}{\text{श}} + \text{श} = \left(\frac{१२}{४}\right)^2 + ४ \text{ फी०} = (३^2 + ४) \text{ फी०}$$

$$= (९ + ४) \text{ फी०} = १३ \text{ फी०}।$$

(३) किसी वृत्त का व्यास ३४ फी० और उसकी एक पूर्णज्या (चाप की) ३० फी० है, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ।

यहाँ व्यास = ३४ फी० और पूज्या ३० फी० है।

$$\therefore \text{चाप की ऊँचाई} = \frac{\text{व्या} - \sqrt{\text{व्या}^2 - \text{पूज्या}^2}}{२}$$

$$= \frac{३४ - \sqrt{३४^2 - ३०^2}}{२} \text{ फी०} = \frac{३४ - \sqrt{३४ \times ४}}{२} \text{ फी०}$$

$$= \frac{३४ - ३४}{२} \text{ फी०} = \frac{३४ - ३४}{२} \text{ फी०} = ९ \text{ फी०}।$$

भवन्ति । ततोऽनुपातेनेष्टवृत्तव्यासे भुजानयनं सुलभं यथा—यदि द्वादशायुत-
व्यासे त्रिद्वयद्वाग्निभश्चन्द्रमितो भुजस्तदेष्टव्यासे क इतीष्टव्यासे वृत्तान्तर्गत-
समत्रिभुजैकभुजः । एवं वृत्तान्तर्गतसमचतुर्भुजादीनामपि ज्ञेयम् ।

उदाहरणम् ।

सहस्रद्वितयव्यासं यद्वृत्तं तस्य मध्यतः ।

समत्र्यस्त्रादिकानां मे भुजान् वद प्रथक् प्रथक् ॥ १ ॥

जिस वृत्त का व्यास २००० है, उस वृत्त के अन्तर्गत सम त्रिभुजादि चित्रों का भुजमान अलग-अलग बताओ ।

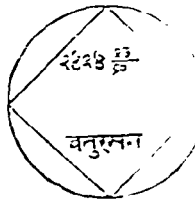
अथ वृत्तान्तस्त्रिभुजे भुजमानानयनाय—



न्यासः । व्यासः २००० । त्रिद्वयद्वाग्निभश्च-
न्द्रै—(१०३६२३) गुणितः ।

(२०७२४६०००) त्र्यस्त्राभ्राकै—(१२००००)
भक्तो लब्धं त्र्यस्त्रे भुजमानम् १७३२३६ ।

वृत्तान्तश्चतुर्भुजे भुजमानानयनाय—

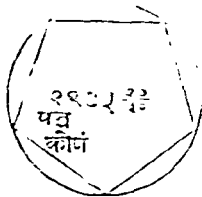


न्यासः । व्यासः २००० । त्रिवाणाष्टयुगाष्टभि-
(२४२४३) गुणितः (१६३७०६०००) त्र्यस्त्रा-
भ्राकै— १२००००) भक्तो लब्धं चतुर्भुज-

मानम् १४१४३३ ।

वृत्तान्तः पञ्चभुजे भुजमानानयनाय—

न्यासः ।



व्यासः २००० । पञ्चाग्निपञ्चमाश्रये—
(७०४०४) गुणितः (१४०८०८०००) त्र्यस्त्रा-
भ्राकै—(१२००००) भक्तो लब्धं पञ्चाश्रये

भुजमानम् ११७४३३ ।

एवमिष्टव्यासादिभ्यो ध्रुवकेभ्योऽन्या अपि जीवाः सिध्यन्तीति ।
तास्तु गोले ज्योत्पत्ता वक्ष्ये ।

उदाहरण—व्यास २००० को १०३२२३ से गुणा कर १२०००० से भाग
देने पर लघ्वि समत्रिभुज की एक भुज = १०३२३/१० । इसी तरह सप्त चतुर्भु-
जादि त्रैत्रों की भुजा का मान भी जाना चाहिये । शेष गणित की क्रिया मूढ
में स्पष्ट है ।

अथ स्थूलजीवाज्ञानार्थं लघुक्रियाकरणमूर्ध्वं वृत्तम् ।

चापोननिन्नपरिधिः प्रथमाह्वयः स्यात्

पञ्चाह्वतः परिधिवर्गचतुर्थभागः ।

आद्योनितेन खलु तेन भजेच्चतुर्त्त-

व्यासाहतं प्रथममाप्तमिह ज्यका स्यात् ॥ ४८ ॥

चापोननिन्नपरिधिः प्रथमाह्वयः स्यात् । परिधिवर्गं चतुर्थं भागः पञ्चाह्वत
कार्यः, आद्योनितेन तेन, खलु चतुर्त्तव्यासाहतं प्रथमं भवेत्, अतः इ-
त्येका स्यात् ।

चाप को परिधि में घटा कर शेष को चाप से गुणा कर गुणनफल में ही
उसका नाम प्रथम (आद्य) रखा गया है । बाद में परिधिवर्ग के चतुर्थांश
को ५ से गुणा कर उसमें प्रथम को घटाकर शेष से चतुर्गुणित व्यास से गुने
हुये प्रथम में भाग दें, तो जीवा होंगी है ।

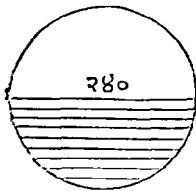
उपपत्तिः—अष्टष्टचापमानम् = चा, परिधिः = प, व्यासः = व्या । अत्र
ज्याशब्देन पूर्णज्या ज्ञानव्या । कल्प्यते व्याचा = $\frac{या (प - चा) या}{का - (प - चा) या}$ । अत्र

यदि चा = $\frac{प}{२} = ६०^\circ$, अतः व्याचा = $\frac{व्या}{२}$ ।

$$\text{तदा } \frac{व्या}{२} = \frac{या (प - \frac{प}{२}) या}{का - (प - \frac{प}{२}) या} = \frac{का - \frac{३प - प}{२}}{का - \frac{३प - प}{२}} \frac{प}{२}$$

$$= \frac{या \times ५ प^२}{का - \frac{५प^२}{२}} = \frac{या \times ५ प^२ \times २३}{(२३ का - ५ प^२) २३} = \frac{या \times ५ प^२}{२३ का - ५ प^२}$$

न्यासः । ७५४



व्यासः २४० । अत्र किलाङ्कुलावचाय विंशतेः साद्वर्कशतांशमिलितः सूत्रमपरिधिः ७५४ । अस्याः प्रादशांशः ४२ । अत्राप्यङ्कुलावचाय द्वयोरश्र-दशांशयुता गृहीतः । अनेन पृथक् पृथगेकादिगुणितेन तुल्ये धनुषि कल्पिते ज्याः साध्याः ।

अथ वाऽत्र मुखार्थं परिवेशप्रादशांशेन परिधिं धनुषि चापवर्त्य ज्याः साध्यास्तथापि ता एव भवन्ति ।

अपवर्तितं न्यासः । परिधिः १८ । चापानि च १ । २ । ३ । ४ । ५ । ६ । ७ । ८ । ९ । १० । चथोक्तकरणेन लज्या जीवाः ४२ । ८२ । १२० । १५४ । १८४ । २०८ । २२६ । २३६ । २४० ।

उदाहरण—यहाँ व्यासार्थ १२० है, अतः व्यास २४० हुआ । इस पर से 'व्यासे भनन्दाग्निहते विभक्ते' इस सूत्र के अनुसार सूत्रम परिधि = $\frac{2 \times 240 \times 3 \times 240}{3 \times 240} = 360$ हुई । यहाँ अङ्क लावचार्थ ७५४ परिधि का मान माना । इसका १८वाँ भाग स्वल्पान्तर से ४२ को एक आदि अङ्कों से गुणा करने पर क्रम से ४२, ८४, १२६, १६८, २१०, २५२, २९४ ३३६ और ३७८ चाप हुए । अत्र उक्त परिधि और इन चापों को ४२ से अपवर्तन देने पर अपवर्तित परिधि = १८ और चाप-मान १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ और ९ हुए । अब इन इन चापों को जीवा बनाने के लिये सूत्र के अनुसार प्रथम चाप १ को परिधि १८ में घटा कर शेष १७ को चाप १ से गुणा करने पर १७ प्रथम हुआ । अब परिधि १८ के वर्ग ३२४ के चतुर्थांश ८१ को ५ से गुणा करने पर ४०५ में प्रथम १७ को घटा कर शेष ३८८ से, चतुर्गुणित व्यास २४० × ४ = ९६० से गुणे हुए प्रथम १७ में भाग देने पर $\frac{3 \times 3 \times 3 \times 17}{4} = 32 \frac{3}{4}$ हुआ । यहाँ शेष को छोड़ कर केवल ४२ प्रथम जीवा का मान हुआ । इसी तरह अन्य चापों की जीवा साधन करने पर क्रम से ८२, १२०, १५४, १८४, २०८, २२६, २३६ और २४० होती है ।

अथ चापानयनाय करणसूत्रं वृत्तम् ।

व्यासाधिवातयुतर्मात्रिकया विभक्तौ

उदाहरणम् ।

विहिता इह ये गुणास्ततो वद् तेषामधुना धनुर्मितिम् ।

यदि तेऽस्ति धनुर्गुणक्रियागणिते गाणितिकानिपुणम् ॥ १ ॥

उदाहरण—हे गणितज्ञ, यदि तुम्हें चाप और जीवा के गणित में निपुणता है, तो पूर्वानीत जीवाओं का चाप-मान बताओ ।

न्यासः ४२ । ८२ । १२० । १५४ । २०५ । २०८ । २२६ । २३६ । २४० ।
 स एवापवर्त्तितपरिधिः १८ व्यासा—(२४०) द्वि (४) घात ६६०
 युतमौर्विक्रिया—१००२ ऽनया जीवाङ्कत्रिणा $\frac{३}{४}$ पञ्चभि ५श्च परिवे—१८
 वर्गो ३०४ गुणितः १७०१० भक्तो लब्धः (१७) अत्राङ्कुलाववाय चतु-
 विंशतेर्ह्यधिकसहस्रांशयुतो गृहीतोऽनेनोनितात् परिधि—१८ वर्ग—३२४
 चतुर्थभागान् ६४ पदे प्राप्ते (८) वृत्ति—(१८) दलात् (६) पतिते (१)
 जातं धनुः । एवं जातानि धनुषि १ । २ । ३ । ४ । ५ । ६ । ७ । ८ । ९ ।
 गतानि परिव्यष्टादशांशेन गुणितानि स्युः ।

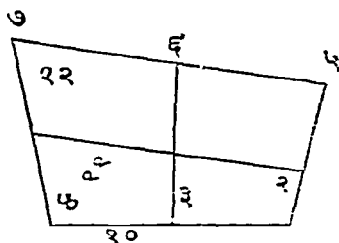
इति श्रीभास्कराचार्यविरचितायां लीलावत्यां क्षेत्रव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—पूर्व साधित जीवा ४२, ८२, १२०, १५४ इत्यादि हैं । यहाँ प्रथम जीवा ४२ का चाप-मान लाना है, अतः पूर्वोक्त परिधि १८ के वर्ग ३२४ को पञ्च गुणित जीवा के चतुर्थांश $\frac{३}{४} \times ५ = \frac{३५}{४}$ से गुणा करने पर $\frac{३२४ \times ३५}{४} = १७०१०$ हुआ । इसे जीवा ४२ से युत चतुर्गुणित व्यास ($४ \times २४० + ४२ =$) १००२ से भाग देने पर स्वल्पान्तर से लब्धि १७ को परिधि-वर्ग के चतुर्थांश ८१ में घटाने पर शेष ६४ के मूल ८ को परिधि १८ के आधे ९ में घटाने से शेष १ बचा । यही ४२ जीवा का चाप-मान हुआ । इसी तरह अन्य जीवाओं के चाप-मान क्रम से २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ और ९ हुए । ये अपवर्त्तित मान हैं, अतः परिधि के १८ वाँ भाग ४२ से इन्हें गुणा करने पर सभी चापों के मान क्रम से ४२, ८४, १२६, १६८, २१०, २५२, २८४, ३२६ और ३७८ हुए ।

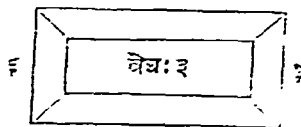
इति श्रीभास्कराचार्यविरचितायां लीलावत्यां तत्त्वप्रकाशिकाटीकोपेतः

क्षेत्रव्यवहारः समाप्तः ।

तत्क्षेत्रदर्शनम् ।



अत्र सममितिकरणेन विस्तारे हस्ताः ६ । दैर्घ्ये ११ ।
वेधे च ३ । तथा कृते क्षेत्रदर्शनम् ।

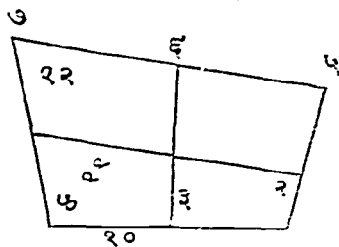


उदाहरण—तीन स्थान में दैर्घ्य के योग = १० + ११ + १२ = ३३ हाथ को स्थान संख्या ३ से भाग देने पर लब्धि ११ हाथ दैर्घ्य का सममान हुआ । इसी तरह तीन जगह की चौड़ाई के योग (५ + ६ + ७ =) १८ को, स्थान संख्या ३ से भाग देने पर ६ हाथ चौड़ाई का सम मान हुआ । एवं तीन स्थानों के वेध के योग को स्थान-संख्या ३ से भाग देने पर ($\frac{२+३+४}{३}$ हाथ =) ३ हाथ वेध का सम मान हुआ । अब समदैर्घ्य ११ को समविस्तार (चौड़ाई) ६ से गुणा करने पर ११ × ६ = ६६ सम क्षेत्रफल हुआ । इसको समवेध ३ से गुणा करने पर ६६ × ३ = १९८ खात का घनहस्त मान हुआ ।

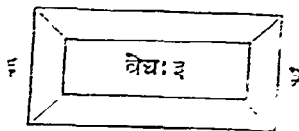
खातान्तरे करणसूत्र सार्ववृत्तम् ।

मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हतं षड्भिः ॥ २ ॥
क्षेत्रफलं सममेवं वेधहतं घनफलं स्पष्टम् ।

तत्क्षेत्रदर्शनम् ।



अत्र सममितिकरणेन विस्तारे द्वास्ताः ६ । दैर्घ्यं ११ ।
वेधे च ३ । तथा कृते क्षेत्रदर्शनम् ।



उदाहरण—तीन स्थान में दैर्घ्य के योग = १० + ११ + १२ = ३३ हाथ को स्थान संख्या ३ से भाग देने पर लब्धि ११ हाथ दैर्घ्य का सममान हुआ । इसी तरह तीन जगह की चौड़ाई के योग (५ + ६ + ७ =) १८ को, स्थान संख्या ३ से भाग देने पर ६ हाथ चौड़ाई का सम मान हुआ । एवं तीन स्थानों के वेध के योग को स्थान-संख्या ३ से भाग देने पर ($\frac{२+३+४}{३}$ हाथ =) ३ हाथ वेध का सम मान हुआ । अब समदैर्घ्य ११ को समविस्तार (चौड़ाई) ६ से गुणा करने पर ११ × ६ = ६६ सम क्षेत्रफल हुआ । इसको समवेध ३ से गुणा करने पर ६६ × ३ = १९८ खात का वनहस्त मान हुआ ।

खातान्तरे करणसूत्र सार्ववृत्तम् ।

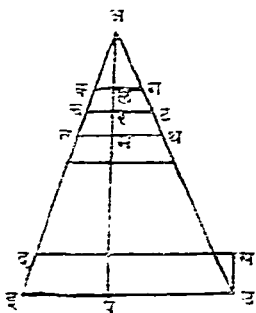
मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हृतं पद्भिः ॥ २ ॥

क्षेत्रफलं सममेवं वेधहतं वनफलं स्पष्टम् ।

$$\begin{aligned}
&= \frac{वे}{ह} \{ २ (वि - वि') (वै - वै') + ३ (वि - वि') वै + ३ (वै - वै') वि + ३ वि \times वै \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ (वि - वि') (२ वै - २ वै' + ३ वै) + ३ वि (वै - वै' + २ वै) \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ (वि - वि') (२ वै + वै) + ३ वि (वै + वै') \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ २ वि \cdot वै - २ वि \cdot वै' + वि \cdot वै - वि \cdot वै' + ३ वि \cdot वै + ३ वि \cdot वै' \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ २ वि \cdot वै + २ वि \cdot वै + वि \cdot वै + वि \cdot वै' \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ वि \cdot वै + वि \cdot वै + वि \cdot वै + वि \cdot वै' + वि \cdot वै + वि \cdot वै' \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ वि \cdot वै + वि \cdot वै + वै (वि + वि) + वै' (वि + वि) \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ वि \cdot वै + वि \cdot वै + (वि + वि) (वै + वै') \} \\
&= \frac{वे}{ह} \{ सु \cdot फ + त \cdot फ + तद्युतिलजज्ञेत्रफल \} अत उपपन्नं खातधनफलानयन पर्यन्तम् ।
\end{aligned}$$

अथ सूचीधनफलसाधनम् ।

कल्प्यते अ इ उ सूची, यस्या वेधः = अ प । अ प वेधस्य न विभागं कृत्वा



प्रतिविभागान्तविन्दोराधारस्य समानान्तर-
भूतलं कार्यं तदा सूच्याः न मितानि खण्डानि
भविष्यन्ति, यथा अ क ग, क ग ट च, च
ट थ त इत्यादि । अत्र सूची खण्डानामति
सूक्ष्मत्वात्स्वरूपान्तरात्तेषां समधनज्ञेत्रत्वम् ।
अथ अ ल $\frac{अ प}{न}$, अ र = $\frac{२ अ प}{न}$, अ म
= $\frac{३ अ प}{न}$ इत्यादि । ततः प्रथम सूची
खण्डस्य द्वैर्व्यम् = $\frac{सु \cdot वै \times अ प}{अ प \times न} = \frac{सु \cdot वै}{न}$,

अस्य वित्तुतिः = $\frac{सु \cdot वि \times अ प}{अ प \times न} = \frac{सु \cdot वि}{न}$ । अतः प्रथम खण्डस्य क्षेत्रफलम्

अत्र न मानं यथा यथाऽधिकं कल्प्यते तथा तथेदं सूचीघनफलं वास्तव-
सूचीघनफलासन्नं भवेदेवं यदि $n = \infty$ तदा $\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n} = 0$

∴ सूचीघनफलम् = $\frac{\text{मु.फ.} \times \text{वे.}}{2}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

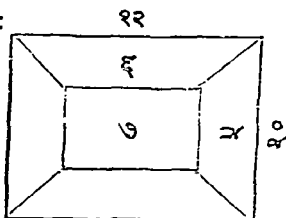
उदाहरणम् ।

मुखे दशद्वादशहस्ततुल्यं विस्तारदैर्घ्यं तु तले तदर्धम् ।

यस्याः सखे सप्तकरश्च वेधः का खातसंख्या वद तत्र वाप्याम् ॥ १॥

जिस वापी के मुख की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १२ हाथ और १० हाथ तथा उसके तल की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ६ हाथ और ५ हाथ हैं, एवं हे मित्र ! जिसका वेध (गहराई) ७ हाथ हैं उसकी खात संख्या बताओ ।

न्यासः



मुखजं क्षेत्रफलम् १२० । तल-
जम् ३० । तद्युतिजम् २७० । एषा-
मैक्यम् ४२० । पङ्क्ति (६) हृतं
जातं समफलम् ७० । वेधहृतं
जातं खातफलं घनहस्ताः ४६० ।

उदाहरण—यहाँ मुख की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १२ हाथ और १० हाथ हैं, अतः सूत्र के अनुसार मुख का क्षेत्रफल = $१२ \times १० = १२०$ वर्ग हाथ । एवं तल की लम्बाई ६ को तल की चौड़ाई से गुणा करने पर तल का क्षेत्रफल = $६ \times ५ = ३०$ व. हाथ । इसी तरह मुख की लम्बाई और चौड़ाई में क्रम से तल की लम्बाई और चौड़ाई जोड़ने पर मुख और तल के योग से उत्पन्न क्षेत्र की लम्बाई = $१२ + ६ = १८$ हाथ और उसकी चौड़ाई = $१० + ५ = १५$ हाथ । अतः उस क्षेत्र का फल = $१८ \times १५ = २७०$ व. हाथ । अब मुखज, तलज और तद्युतिज क्षेत्रों के फल का योग = $१२० + ३० + २७० = ४२०$ व. हाथ हुआ । इसको ६ से भाग देने पर $४२० \div ६ = ७०$ सम फल हुआ । इसको वेध ७ से गुणा करने पर $७० \times ७ = ४९०$ घन हाथ, खात का फल हुआ ।

की उँचाई ३ हाथ में इँट की उँचाई $\frac{1}{2}$ से भाग देने पर $३ \div \frac{1}{2} = \frac{३ \times २}{१} = २४$
इँट की पङ्क्ति हुई। इसी तरह पत्थर की चिति में भी फल आदि लाना चाहिये।

इति चिति व्यवहारः ।

अथ ऋकचव्यवहारे करणसूत्रं वृत्तम् ।

पिण्डयोगदलमग्रमूलयोर्द्वैर्घ्यसङ्गुणितमङ्गुलात्मकम् ॥ २ ॥

दारुदारणपथैः समाहतं पट्स्वरेषु विहतं करात्मकम् ।

अग्रमूलयोः पिण्डयोगदलं दारुदारणपथैः समाहतं फलं चत् अङ्गुलात्मकं
तदा पट्स्वरेषु विहतं करात्मकं भवति ।

जिस लकड़ी की चिराई करानी हो उसके अग्र और जड़ की मुटाई के योग के आधे को लकड़ी की लम्बाई से गुणा कर जो हो, उसे लकड़ी जितनी जगह चीरी गई हों उतनी संख्या से गुणा करने पर यदि फल अंगुलात्मक हो, तो उसे ५७६ से भाग दें तो हस्तात्मक मान होता है।

उपपत्तिः—अथ कस्मिन्नपि काष्ठे पिण्डस्य सममितिरानयनार्थमग्रमूलयोः
पिण्डयोर्योगदलं कृतम् । तद्यदि काष्ठद्वैर्घ्येण गुणितं तदा चेत्रफलं भवतीति
स्पष्टमेव ! यदि काष्ठस्य पिण्डद्वैर्घ्येऽङ्गुलात्मके तदा ते चतुर्विंशत्या
भक्ते जाते हस्तात्मके, ताभ्यां काष्ठस्य चेत्रफलम् = $\frac{\text{पिण्डाङ्गुल}}{२३} \times \frac{\text{द्वैर्घ्याङ्गुल}}{२३}$

= $\frac{\text{पिण्डाङ्गुल} \times \text{द्वैर्घ्याङ्गुल}}{५७६}$ । ततोऽनुपातः—यद्येकेन दारणपथेनेदं फलं तदाभीष्ट-
दारणपथैः किमिति हस्तात्मकं दारणमानम् = $\frac{\text{पिण्डाङ्गुल} \times \text{द्वैर्घ्याङ्गुल} \times \text{दा. प.}}{५७६}$
अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

मूले नखाङ्गुलमितोऽथ नृपाङ्गुलोऽग्रे

पिण्डः शताङ्गुलमितं किल यस्य द्वैर्घ्यम् ।

तदारुदारणपथेषु चतुर्षु किं स्या-

द्वस्तात्मकं वद् सखे गणितं वृत्तं मे ॥ १ ॥

किसी लकड़ी की मुटाई जड़ में २० अंगुल और अग्र में १३ अंगुल है।

उत्पत्तिः—यदि नियतं क्षेत्रेऽप्रसृतयोः निम्ने समे तदा निम्नतिल्लो-
 धानमनं क्षेत्रच्छेदं स्वयमेव । विदारणादिप्रकारं तु कालवदस्य कौमह्येन तदप्यस्य
 मृदुत्वकठिनत्वयोरेव च निर्द्धारणे इति मनुस्मृतिकेदोक्तं भास्करेण ।

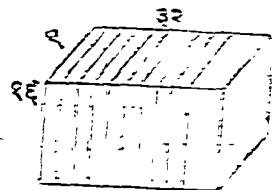
उदाहरणम् ।

यद्विस्तृतविर्दन्तानिवाङ्गुलानि पिण्डस्तथा षोडश चतुराश्रिते ।

क्षेत्रेषु नियतवस्तु प्रचञ्च किं स्यात् कलं तत्र कदात्मकं मे ॥ १ ॥

त्रिन लकड़ी की चौड़ाई ३२ अंगुल और लुम्बाई १६ अंगुल है, उसको
 चौड़ाई में १ जगह और लम्बाई में २ जगह का हस्तात्मक षड् कोण क्या होगा, यह बताओ ।

न्यासः



विस्तारः ३२ । निर्यातः १६
 पिण्डवस्तुतिहेतिः २१२ ।
 भाग ६ श्री ११०० । षट्-
 स्वरेषु १०६ विहृता जगु-
 कर्तं हस्ताः न ।

इति ऋकव्यवहारः ।

उदाहरण—यहाँ लकड़ी की लुम्बाई १६ अंगुल को उसकी चौड़ाई
 ३२ अंगुल से गुणा कर १६ × ३२ = ५१२ क. अंगुल को क्षेत्र में लम्बा १ से
 गुणा करने पर ५१२ × १ = ५१२ क. अंगुल हुआ । इसको ५०६ से भाग
 देने पर ५१२ ÷ ५०६ = ८ हस्तात्मक षड् हुआ ।

इति ऋकव्यवहारः ।

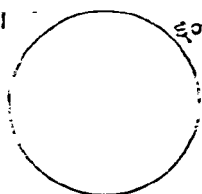
अथ सरिन्धव्यवहारे करणसूत्रं वृत्तम् ।

अनशुषु दक्षमांगोऽलुष्वथैकादशांशः
 परिधिद्वयभागः शूक्रधान्येषु वैशः ।
 भवति परिविषष्टे वर्गिते वैशमिते
 इनगणितकराः स्युर्भागश्चास्ताथ स्वार्थः ॥ १ ॥

अनशुषु धान्येषु (सरिन्धे) दक्षमांसः वैशः स्तान्, अथ अलुष्वथैक

अथाणुधान्यराशिमानानयनाय—

न्यासः ।

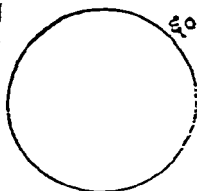


परिधिः ६० । वेद्यः ३३ । ज्ञात

फलम् ४४४ ३३ ।

अथ शूकधान्यराशिमानानयनाय—

न्यासः ।



परिधिः ६० । वेद्यः ३३ ज्ञात

न्यायः ६६६ ३३ ।

उदाहरण—यहाँ स्थूल घान की परिधि ६० हाय है, तो सूत्र के अनुसार
 घनका दशानांश $६० \div १० = ६$ हाय वेद्य हुआ । अब परिधि ६० के छठे भाग
 $\frac{६०}{६} = १०$ के वर्ग १०० को वेद्य ६ से गुणा करने पर $१०० \times ६ = ६००$ वन
 हाय हुए । इसी प्रकार सूत्रन घान की परिधि ६० के ११ वाँ भाग $\frac{६०}{११}$ हाय
 वेद्य से परिधि के षष्टांश के वर्ग १०० वर्ग हाय को गुणा करने पर $\frac{१०० \times ६६}{११}$
 $= \frac{६६००}{११} = ६००$ वन हाय हुए । एवं शूकघान की परिधि ६० के २ वें
 भाग $\frac{६०}{२}$ हाय, वेद्य से परिधि के छठे भाग के वर्ग १०० व हाय को गुणा
 करने पर $\frac{१०० \times ६६}{६} = \frac{६६००}{६} = ११००$ वन हाय हुए ।

अथ भित्त्यन्तर्बाह्यकोणसंलग्नराशिप्रमाणानयने करणसूत्रं वृत्तम् ।

द्विवेदसत्रिभागैकनिघनात् तु परिधेः फलम् ।

भित्त्यन्तर्बाह्यकोणस्थराशेः स्वगुणभाजितम् ॥ २ ॥

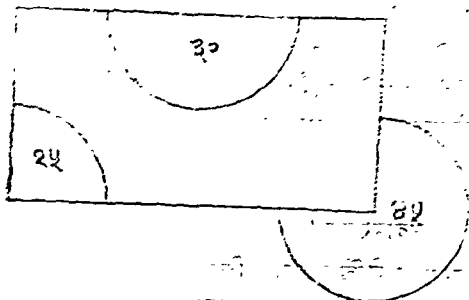
भित्त्यन्तर्बाह्यकोणस्थराशेः परिधेः द्विवेदसत्रिभागैकनिघनात् (यत् फलं तद्)
 स्वगुणभाजितं तदा फलं भवति ।

घर की दीवार के भीतर तथा भीतर और बाहर के कोनों में लगे हुए

अथागुधान्यराशिमानानयनाय—

न्यासः ।

न्यासः



पूर्ववत् क्षेत्रत्रयस्य स्वगुणगु-

णितपरिधिः ६० ।

वेधः ३३ । क

लानि २३३३ ।

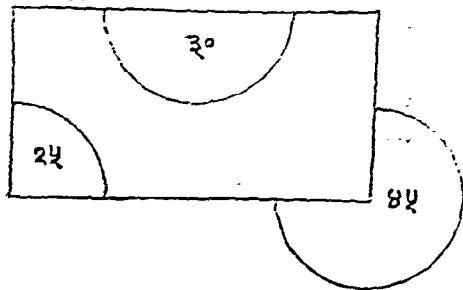
१३३३ ।

२००३ ।

अथ शूकधान्यराशिमानानयनाय—

न्यासः ।

न्यासः



अत्रापि पूर्ववत् क्षेत्रत्रयस्य

स्वगुणगुणितः

परिधिः ६० ।

वेधः ३३ ।

कलानि

२३३३ । १३३३ ।

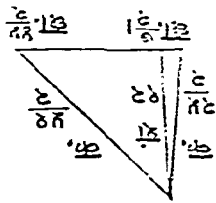
२०० ।

इति गणितव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—यहाँ पहले स्थूल धान के ढेर का वन-हम्म निकालना है, तो सूत्र के अनुसार दीवार में लगी हुई परिधि ३० को २ से, भीतर के कोने में लगे हुए ढेर की परिधि १५ हाथ को ४ से और बाहर के कोने में लगे हुए ढेर की परिधि १५ हाथ को ३ से गुणा करने पर क्रम से $३० \times २ = ६०$, $१५ \times ४ = ६०$, और $\frac{१५ \times १५}{२} = ११२.५$ होंगे । अब स्थूल धान होने के कारण इन

उदाहरण—यदि दोनो श्रमा का अन्तर १२ और दोनो श्रमा का अन्तर १२९ का वर्ग करे तो (१२९ - १२) = ११७ को ५२२ से भाग देवे

१२९ को ५२२ से भाग देवे १२ को वर्ग करे १४४ से भाग देवे १२ को



नमाने

श्रमान्तर १२ । श्रमान्तर १२९ ।
 श्रमान्तर १२९ । श्रमान्तर १२९ ।
 श्रमान्तर १२९ । श्रमान्तर १२९ ।
 श्रमान्तर १२९ । श्रमान्तर १२९ ।
 श्रमान्तर १२९ । श्रमान्तर १२९ ।

श्रमान्तर १२९ को वर्ग करे तो १४४ मिलेगा ।

दोनों श्रमा को वर्ग करे तो १४४ और १२९ को वर्ग करे, तब १४४ से १२९ को घटावे तो श्रमा का अन्तर १२ ही मिलेगा ।

यदि दोनो श्रमा का अन्तर १२ और दोनो श्रमा का अन्तर १२९ का वर्ग करे तो १४४ और १२९ को वर्ग करे, तब १४४ से १२९ को घटावे तो श्रमा का अन्तर १२ ही मिलेगा ।

उदाहरण ।

$$= \frac{12 \times 129}{12 + 129} = \frac{1548}{141} = 10.98$$

$$\text{नमाने } 12 \times 129 = 1548 \text{ और } 12 + 129 = 141$$

$$\therefore \frac{1548}{141} = 10.98 \text{ और } 12 + 129 = 141$$

$$\therefore \frac{1548}{141} = 10.98 \text{ और } 12 + 129 = 141$$

$$\frac{1548}{141} = 10.98 \text{ और } 12 + 129 = 141$$

$$\therefore 12 \times 129 = 1548 \text{ और } 12 + 129 = 141$$

$$= \frac{1548}{141} = 10.98 \text{ और } 12 + 129 = 141$$

ये लब्धि $\frac{१६}{३} = ३$ में १ जोड़ कर $(३ + १) = ४$ के वर्गमूल २ को कर्णान्तर १३ से गुणा करने पर $१३ \times २ = २६$ हुआ। इसमें छायान्तर १९ को घटा तथा जोड़ कर दोनों का आधा करने पर क्रम से लघुच्छाया $= \frac{२६ - १९}{२} = ३$ और बृहच्छाया $= \frac{२६ + १९}{२} = २२$ हुई। अब ल. छाया ३ के वर्ग $\frac{९}{४}$ में शंकु १२ के वर्ग १४४ को जोड़ कर $(\frac{९}{४} + १४४ = \frac{५९५}{४}) = \frac{२३५}{४}$ का मूल लेने से $\frac{३५}{४}$ लघु कर्ण, और बृ. छा $\frac{९}{४}$ के वर्ग $\frac{२०२५}{४}$ में शंकु वर्ग १४४ को जोड़ कर $(\frac{२०२५}{४} + १४४ = \frac{२२२५}{४}) = \frac{२६०१}{४}$ का मूल लेने पर $\frac{५१}{४}$ बृहत्कर्ण हुआ।

छायान्तरं करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

शङ्कुः प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरन्नखलाया भवेद्विनरदीपशिखौच्च्यभक्तः ।

प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरन्नः शङ्कुः विनरदीपशिखौच्च्यभक्तः छाया भवेत् ।

दीप की जड़ और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि को शङ्कु से गुणा कर गुणनफल को दीपशिखा की ऊँचाई में शङ्कु को घटा कर शेष से भाग दें तो छाया होती है ।

उपपत्ति:—कल्प्यते d क = शङ्कु, अ व = दीपशिखौच्च्यम् अ द =

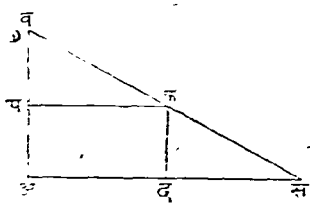
प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरभूमिः = क प, स द

= छाया, प व = अ व - अ प = अ व

- द क = दीपशिखौच्च्य - शङ्कु । अ थ,

व प क, क द स त्रिभुजयोः साजात्यादनु-

पातेन - द स = $\frac{प क \times द क}{प व}$, वा छाया



= $\frac{\text{प्रदीपतलशङ्कुतलान्तर} \times \text{शं.}}{\text{दीपशिखौच्च्य} - \text{शं.}}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

शङ्कुप्रदीपान्तरभूत्विहस्ता दीपोच्छ्रितः सार्धकरत्रया चेत् ।

शङ्कोस्तदाऽर्काङ्गुलसन्मितस्य तस्य प्रभा स्यात् कियती वदाशु ॥१॥

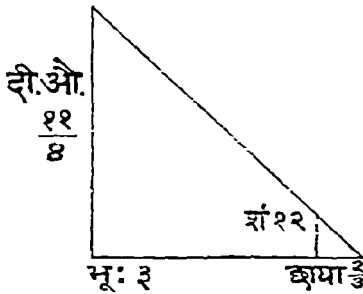
यदि शङ्कु और दीप की जड़ के बीच की भूमि ३ हाथ और दीप की ऊँचाई ६ तीन हाथ है, तो १२ अङ्गुल के शङ्कु की छाया का मान शीघ्र बताओ ।

उदा रणम् ।

प्रदीपशङ्खवन्तरभूखिहस्ता छायाऽङ्गुलैः षोडशभिः समा चेत् ।
दीपोच्छ्रितः स्यात् क्रियती वदाशु प्रदीपशङ्खवन्तरमुच्यतां मे ॥१॥

यदि दीप और शङ्ख की जड़ के बीच की भूमि ३ हाथ और छाया १६ अंगुल है, तो दीप की उँचाई बताओ। एवं दीप की उँचाई जान कर उसी छाया और शङ्ख पर से दीप और शङ्ख की जड़ के बीच की भूमि का मान बताओ।

न्यासः ।



शङ्खः १२ । छायाङ्गुलानि
१६ । शङ्खप्रदीपान्तरहस्ताः
३ । लघ्वं दीपकौच्यं
हस्ताः ११/४ ।

उदाहरण—यहाँ सूत्र के अनुसार शङ्ख १२ अंगुल अर्थात् ३/४ हाथ को दीप और शङ्ख की जड़ के बीच की भूमि ३ हाथ से गुणा कर $३ \times \frac{३}{४} = \frac{९}{४}$ को, छाया (१६ अंगुल = $\frac{१६}{४}$ हाथ =) $\frac{३}{४}$ हाथ से भाग देने पर लघ्वि $(\frac{९}{४} \div \frac{३}{४} = \frac{९}{४} \times \frac{४}{३} = ३)$ हाथ में शङ्ख $\frac{३}{४}$ हाथ जोड़ने पर $(३ + \frac{३}{४} = ३\frac{३}{४})$ हाथ दीप की उँचाई हुई। दूसरे प्रश्न का उत्तर आगे है।

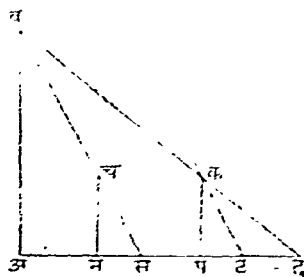
प्रदीपशङ्खवन्तरभूमानानयनाद्य करणसूत्रं वृत्तार्थम् ।

विशङ्खुदीपोच्छ्रयसंगुणा भा शङ्खदृष्टता दीपनरान्तरं स्यात् ।

भा विशङ्खुदीपोच्छ्रयसंगुणा, शङ्खदृष्टता दीपनरान्तरं स्यात् ।

दीप की उँचाई में शङ्ख को घटा कर जो हो, उससे छाया को गुणा कर गुणनफल में शङ्ख से भाग दें, तो दीप और शङ्ख की जड़ के बीच की भूमि होती है।

उपपत्तिः—कल्प्यते, अ व = दीपोच्छ्रितः । च न = शङ्कुः = क प ।
न स = प्र. छा, प द = द्वि. छा । स द = छायाग्रान्तरम् । अथ क विन्दोः व स
समानान्तरा कट रेखा विधेया, तदा न च स, प क ट त्रिभुजयोस्तुल्यत्वात्
न स = प ट = प्र. छा, अतः ट द = प द - प ट = द्वि. छा - प्र. छा ।
अथ द व स त्रिभुजे व स आधारस्य समानान्तरा कट रेखा तेन पष्ठाध्यायेन



$$\frac{द ट}{ट स} = \frac{द क}{क व} । परञ्च, द व अ त्रिभुजे व अ$$

आधारस्य सामानान्तरा क प रेखा तेन

$$\frac{द क}{क व} = \frac{द प}{प अ} । \therefore \frac{द ट}{ट स} = \frac{द प}{प अ} ।$$

$$\therefore \frac{ट स}{द ट} = \frac{प अ}{द प} \therefore 1 + \frac{ट स}{द ट} = 1 + \frac{प अ}{द प}$$

$$\therefore \frac{द ट + ट स}{द ट} = \frac{द प + प अ}{द प} ।$$

$$\text{वा } \frac{स द}{ट द} = \frac{अ द}{प द} । \therefore अ द = \frac{स द \times प द}{ट द} । \text{ वा द्वि. भूमिः}$$

$$= \frac{\text{छायाग्रान्तर} \times \text{द्वि. छा}}{\text{द्वि. छा} - \text{प्र. छा}} । \text{ एवमेव प्रथमभूमिः} = अ स = \frac{\text{छायाग्रान्तर} \times \text{प्र. छा}}{\text{द्वि. छा} - \text{प्र. छा}} ।$$

$$\text{ततः व अ द, क प द त्रिभुजयोः साजात्पादनुपातेन - अ व} = \frac{प क \times अ द}{प द}$$

$$\frac{\text{शङ्कु} \times \text{द्वि. भूमि}}{\text{द्वि. छा}} = \text{दीपशिखौच्छ्रयम्} । \text{ एवमेव व अ स, च न स त्रिभुजयोः साजा-}$$

$$\text{त्पादनुपातेन - अव} = \text{दीपौच्छ्रयम्} = \frac{\text{न च} \times \text{अ स}}{\text{न स}} = \frac{\text{शङ्कु} \times \text{प्र. भूमि}}{\text{प्र. छा}} \text{ अत उप-}$$

पन्नम् ।

उदाहरणम् ।

शङ्कोर्भाऽर्कमिताङ्गुलस्य सुमते ! दृष्टा किलाष्टाङ्गुला

छायाप्राभिमुखे करद्वयमिते न्यस्तस्य देशे पुनः ।

तस्यैवार्कमिताङ्गुला यदि तदा छायाप्रदीपान्तरं

दीपौच्छ्रयं च कियद्वद व्यवहृति छायाभिधां वेत्सि चेत् ॥ १ ॥

उदाहरण—यहाँ प्रथम शङ्कु की जड़ से द्वितीय शङ्कु की जड़ तक २ हाथ अर्थात् ४८ अंगुल हैं। इसमें प्रथम छाया का मान ८ अंगुल घटाने से प्रथम छायाग्र से द्वितीय शङ्कु के मूल पर्यन्त भूमिका मान (४८ - ८ =) ४० अंगुल हुआ। इसमें द्वितीय छाया १२ अंगुल जोड़ने से दोनों छाया के अग्रों का अन्तर ४० + १२ = ५२ अंगुल हुआ। अब सूत्र के अनुसार प्रथम छाया ८ अंगुल को छायाग्रान्तर ५२ अंगुल से गुणा कर $८ \times ५२ = ४१६$ व. अंगुल को दोनों छाया के अन्तर (१२ - ८ =) ४ अंगुल से भाग देने पर $\frac{४१६}{४} = १०४$ अंगुल प्रथम भू-मान हुआ। इसको शङ्कु १२ अंगुल से गुणा कर प्रथम छाया से भाग देने पर $\frac{१०४ \times १२}{१२} = १३ \times १२ = १५६$ अंगुल दीप की उँचाई हुई। इसी प्रकार छायाग्रान्तर ५२ से द्वितीय छाया १२ अंगुल को गुणा कर दोनों छाया के अन्तर ४ अंगुल से भाग देने पर $\frac{१३ \times ५२}{४} = १५६$ अंगुल द्वितीय भूमि हुई। इसको शङ्कु १२ अंगुल से गुणा कर द्वितीय छाया से भाग देने पर $\frac{१५६ \times १२}{१२} = १५६$ अंगुल = $६\frac{३}{४}$ हाथ दीप की उँचाई हुई। इस तरह प्रथम छाया का हस्तात्मक मान = $\frac{३६}{४} = ९$ प्रथम भूमि १०४ अंगुल = $\frac{१०४}{१२} = ८\frac{३}{४}$ हाथ। द्वितीय छाया १२ अंगुल = $\frac{१२}{१२} = १$ हाथ = $\frac{३}{४}$ हाथ। द्वितीय भूमि = $\frac{१५६}{१२} = १३$ हाथ = $६\frac{३}{४}$ हाथ, और दीप की उँचाई = $६\frac{३}{४}$ हाथ।

यद्येवं तद्बहुभिः किमित्याशङ्क्याह—

यत्किञ्चिद्गुणभागहारविधिना वीजेऽत्र वा गण्यते
तत् त्रैराशिकमेव निर्मलधियाभेवावगम्यं विदाम् ।
एतद्यद्बहुधाऽस्मदादिजडधीधीवृद्धि बुद्ध्या बुधै-
स्तद्भेदान् सुगमान् विधाय रचितं प्राज्ञैः प्रकीर्णादिकम् ॥

बीजगणित अथवा लीलावती में गुणन और भागहार की विधि से जो कुछ कहे गये हैं वे सभी स्वच्छ (तीव्र) बुद्धि वालों के लिये त्रैराशिक ही समझना चाहिये। उसी त्रैराशिक के भेदों को सरल बना कर हम जैसे मन्द बुद्धियों के लिये पूर्वाचार्यों ने प्रकीर्ण आदि गणितों की रचना की है।

इति श्रीभास्कराचार्यविरचितायां लीलावत्यां छायाधिकारः समाप्तः ।

आपस में भाग देने पर अन्त में जो शेष रहे वही उन दोनों संख्याओं का महत्तम समापवर्त्तक होता है। उस महत्तम समापवर्त्तक से भाज्य और हार में भाग देने पर वे दृढ़ होते हैं, अर्थात् उनमें फिर किसी अङ्क निशेष का भाग नहीं लगता है। उन दृढ़ भाज्य और हर में आपस में तब तक भाग देना चाहिये जब तक भाज्य में १ अङ्क बचे। लब्धियों को क्रम से नीचे-नीचे रख कर उनके नीचे शेष को और सबसे नीचे शून्य को रखें। उपान्तिम अङ्क को अपने ऊपर वाले अङ्क से गुणाकर उसमें अन्तिम अङ्क को जोड़ें और उस अन्तिम अङ्क को त्याग दें। इसी तरह फिर उपान्तिम को अन्त्य और उसके ऊपर के अङ्क को उपान्त्य मान कर उक्तरीति से क्रिया तब तक करनी चाहिये जब तक पङ्क्ति में दो राशि बच जाँय। उनमें ऊपर वाली संख्या में दृढ़ भाज्य से और नीचे वाली संख्या में दृढ़ हर से भाग देने पर जो शेष बचें वे क्रम से लब्धि और गुणक होते हैं। लेकिन इस प्रकार से लब्धि और गुणक तभी ठीक होते हैं, यदि भाज्य और हर में परस्पर भाग देने पर लब्धि की संख्या सम हो। यदि उसकी संख्या विषम हो, तो उक्त रीति से आये हुये लब्धि और गुणक को अपने-अपने तत्क्षण अर्थात् भाज्य और हर में घटाने से वास्तव लब्धि और गुणक होते हैं।

उपपत्ति:—यदि भाज्यः = भा, हारः = ह, शेषकः = च, लब्धिः = ल, तथा

$$\text{गुणकः} = \text{गु}, \text{ तदालापोकत्या} - \text{ल} = \frac{\text{भा} \times \text{गु} + \text{च}}{\text{ह}}$$

∴ $ह \times ल = भा \times गु + च$ । अत्र यदि 'इ' अनेन भक्तो हरः शुद्धयति तदा प्रथमपक्षस्य निरवयवत्वात्तत्तुल्यस्य द्वितीयपक्षस्यापि 'इ' अनेन भक्तस्य निरवयवत्वं स्यात्। तत्र यदि 'इ' अनेन भक्तो-भाज्यो निशेषो भवति तदा शेषोऽपि 'इ' अनेन निःशेषो भवत्येवान्यथा निरवयवस्य सावयवेन सह समत्वात्पत्तिः स्यात्तेन येनच्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेनेत्याद्युपपन्नम्। अथ अ, व अनयोर्म-

$$\text{हत्तमापवर्त्तनानयनाय कल्पयते} \frac{अ}{व} = स + \frac{द}{व}, \text{ तदा}$$

$$अ = स \times व + द \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{एवं} \frac{व}{द} = च + \frac{प}{द}, \text{ तदा} व = च \times द + प \dots \dots \dots (२)$$

क = २ [{ (२ जे + ०) + जे } + २ जे + ०] + ३ (२ जे + ०) + जे,
अत्र भाज्यहारयोर्मिथो भजननेनागता लब्धयः क्रमेणोत्तरोत्तरमधोऽधः स्थाप्या-
स्तदधः जेपोऽन्ते त्वं निवेश्यं ततः स्वोर्ध्वोहतेऽन्त्येन युते तदन्यमित्यादिरीत्या
राशियुग्मं गुणलब्धयोर्भावत्तावत्कालकयोर्मनि भवतः । एतेनोपपन्नं राशियुग्म-
मित्यन्तं सूत्रम् ।

अत्र यदि ल = $\frac{\text{गु}\cdot\text{भा} \pm \text{जे}}{\text{हा}}$, \therefore हा × ल = गु·भा ± जे,

अत्र $\frac{\text{गु}}{\text{हा}} = इ + \frac{\text{गु शे}}{\text{हा}}$, \therefore गु शे = गु - हा × इ,

अथ गु·भा ± जे = हा × ल, पञ्चौ 'इ·हा·भा·' अनेन विशोधितौ तदा
गु·भा ± जे - इ·हा·भा· = हा × ल - इ·हा·भा·,

भा (गु - इ·हा) ± जे = हा (ल - इ·भा·) अत्र यदि 'गु - इ·हा' अयं
गुणः स्यात्तदा 'ल - इ·भा·' अयं लब्धिसमो भवेत्तत्र गु - इ· हा = गुणशेषः ।

ल - इ·भा· = लब्धि शेषः, $\frac{\text{ल}}{\text{भा}} = इ + \frac{\text{ल शे}}{\text{भा}}$

\therefore ल = भा·इ + ल·शे, \therefore ल - भा·इ = ल शे, अत्र गुण-शेषे लब्धिशेषे
च 'इ' प्रमितलब्धयोर्मनिं तुल्यमेवेत्युपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

एकविंशतियुतं शतद्वयं यद्गुणं गणक पञ्चषष्टियुक् ।

पञ्चवर्जितशतद्वयोद्भृतं शुद्धिमेति गुणकं वदाशु तम् ॥ ५ ॥

हे गणक, वह गुणक वताओ, जिससे २२१ को गुणा कर, गुणनफल में
६५ जोड़ कर १९५ से भाग देने पर निशेष हो जाता है ।

न्यासः । भाज्यः २२१ । हारः १६५ । ज्ञेयः ६५ ।

अत्र परस्परं भाजितयोर्भाज्य २२१ भाजकयोः १६५ शेषं १३ । अ-
नेन भाज्यहारज्ञेया अपवर्तिता जातो भाज्यः १७ । हारः १५ । ज्ञेयः
५ । अनयोर्दृढभाज्यहारयोः परस्परं भक्तयोर्लब्धान्ययोऽधस्तदधः ज्ञे-

गुणिता लब्धिः वास्तवा स्यात् । पुनः समपवर्त्तितयोः युतिभाजकयोः यः गुणः भवति स च अपवर्त्तनसंगुणः वास्तवः स्यात् ।

किसी संख्या से चेष और भाज्य को अपवर्त्तन देकर पहले की रीति से लब्धि और गुणक लाना चाहिये । यहाँ गुणक वास्तव होना है, किन्तु लब्धि को अपवर्त्तनाङ्क से गुणा करने पर वास्तव लब्धि होती है । इसी तरह चेष और भाजक को समान अङ्क से अपवर्त्तन देकर उच्चरीति से जो गुणक हो उसे अपवर्त्तनाङ्क से गुणा करने पर वास्तव गुणक होता है और लब्धि वही वास्तव लब्धि होती है ।

उपपत्तिः—अत्र कुट्टकोक्त्या गु·भा = चेष = हा·ल, पत्रौ 'अ' अनेन विनक्तौ

$$\text{तदा } \frac{\text{गु} \cdot \text{भा} = \text{चेष}}{\text{अ}} = \frac{\text{हा} \cdot \text{ल}}{\text{अ}}$$

$$\text{वा गु } \frac{\text{भा}}{\text{अ}} = \frac{\text{चेष}}{\text{अ}} = \frac{\text{हा} \cdot \text{ल}}{\text{अ}}$$

$$\text{वा गु} \times \text{भा} = \text{चेष} = \text{हा} \times \text{ल}, \therefore \text{ल} = \frac{\text{गु} \times \text{भा} = \text{चेष}}{\text{हा}} = \frac{\text{ल}}{\text{अ}}$$

अत्र स्पष्टमवलोक्यते यत् 'गु' गुणो वास्तवः किन्तु लब्धिस्तु $\frac{\text{ल}}{\text{अ}}$ इयं न वास्तवातः अपवर्त्तनेन गुणिता वास्तवा भविष्यति । यद्यत्र चेष भाजक्योर-

$$\text{पवर्त्तनाङ्कः} = \text{अ}, \text{ तदा } \frac{\text{गु} \times \text{भा} = \text{चेष}}{\text{अ}} = \frac{\text{हा} \times \text{ल}}{\text{अ}} ।$$

$$\text{वा } \frac{\text{गु}}{\text{अ}} \times \text{भा} = \frac{\text{चेष}}{\text{अ}} = \frac{\text{हा}}{\text{अ}} \times \text{ल},$$

$$\text{वा } \frac{\text{गु}}{\text{अ}} \times \text{भा} = \text{चेष} = \text{हा} \times \text{ल}, \therefore \text{ल} = \frac{\text{गु} \cdot \text{भा} = \text{चेष}}{\text{हा}}$$

अत्र लब्धिस्तु वास्तवा 'ल' किन्तु गुणः $\frac{\text{गु}}{\text{अ}}$ अयं अपवर्त्तनाङ्केन 'अ' अनेन गुण्यते तदा वास्तवः 'गु' गुण को भविष्यतीत्युपपन्नं सर्वम् ।

रीति द्वारा वल्ली बना कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते' इस सूत्र से ऊर्ध्वाङ्क २४३० और अधराङ्क १५३० होते हैं, जो नीचे के गणित से स्पष्ट है।

वल्ली			
१	$१५३० \times १ + ९०० = २३४० =$	ऊर्ध्वाङ्क	ऊर्ध्वाङ्क में १०० से
१	$९०० \times १ + ६३० = १५३० =$	अधराङ्क	भाग देने पर शेष
१	$६३० \times १ + २७० = ९००$		३० लब्धि हुई और
२	$२७० \times २ + ९० = ६३०$		अधराङ्क में ६३ से
२			भाग देने पर शेष
१	$२ \times ९० + ९० = २७०$		१८ गुणक हुआ।
शेष ९०	$९० \times १ + ० = ९०$		
०			

अथवा—

भाज्य और शेष को १० से अपवर्त्तन देकर भाज्य १०, शेष ९ और हर ६३ हुये। इस नवीन भाज्य और शेष पर से वल्ली बना कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते' इत्यादि विधि से ऊर्ध्वाङ्क २७ और अधराङ्क १७१ हुये।

वल्ली			ऊर्ध्वाङ्क में दृढ़ भाज्य १०
०	$१७१ \times ० + २७ = २७$	ऊर्ध्वाङ्क	से भाग देकर शेष ७ लब्धि
६			हुई, और अधराङ्क १७१
३	$२७ \times ६ + ९ = १७१ =$	अधराङ्क	में ६३ से भाग देने पर
शेष ९	$९ \times ३ + ० = २७$		शेष ४५ गुणक हुआ।
०			यहाँ 'भवति कुट्टविधेर्युति-

भाज्ययोः' इस सूत्र के अनुसार लब्धि ७ को अपवर्त्तनाङ्क १० से गुणा करने पर वास्तव लब्धि ७० हुआ। यहाँ वल्ली विपम है, अतः लब्धि ७० को अपने तत्क्षण १०० में घटाने से वास्तव लब्धि ३० और गुणक ३५ को अपने तत्क्षण ६३ में घटाने से वास्तव गुणक १८ हुआ।

अथवा—हार और शेष में ९ का अपवर्त्तन देने से भाज्य १००, हार और शेष १० हुये। उक्तरीति से वल्ली बनाकर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते'

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

क्षेपजे तक्षणाच्छुद्धे गुणासी स्तो वियोगजे ।

क्षेपजे धनक्षेपोद्भवे ये गुणासी ते तक्षणात् शुद्धे सति वियोगजे ऋणक्षेपो-
द्भवे गुणासी स्तः ।

धनात्मक क्षेप में जो गुणक और लब्धि हों उन्हें अपने-अपने तक्षण में
घटाने पर ऋणक्षेप के गुणक और लब्धि होते हैं ।

उपपत्तिः—कुट्टकौकस्या कल्प्यते ल = भा० गु० + चे,
हा

∴ भा० गु० + चे = हा० ल., पक्षौ हा० भा अस्मिन् शोधितौ जातौ हा०
भा - (भा० गु० + चे) = हा० भा - हा० ल, वा हा० भा - भा० गु - चे = हा०
भा - हा० ल ।

∴ भा (हा - गु) - चे = हा (भा - ल), अत्र यदि 'हा - गु' अयं
गुणस्तदा (भा - ल) इयं लब्धिः । अत्र स्वरूपावलोकनेन स्फुटं यत् धनक्षेपीय-
लब्धि गुणौ स्वस्व तक्षणाच्छुद्धौ ऋणक्षेपीयौ जातावित्युपपन्नम् ।

अत्र पूर्वोदाहरणे नवतिक्षेपजौ लब्धिगुणौ जातौ ३० । १८ । एतौ
स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां १०० । ६३ । शोधितौ ये क्षेपके तन्मितौ लब्धिगुणौ
नवतिशोधिते ज्ञातव्यौ ७० । ४५ । एतयोरपि स्वतक्षणाक्षप इति वा
१७० । १०८ । अथवा २७० । १७१ ।

उदाहरण—पहले के उदाहरण में धनात्मक ९० क्षेप से आये हुये लब्धि
३० और गुणक १८ हैं । इनको ऋणक्षेपीय घनाने के लिये अपने-अपने तक्षण
१०० और ६३ में क्रम से घटाने पर लब्धि ७० और गुणक ४५ हुये । इसी
तरह धनक्षेपीय अन्य लब्धि और गुणक को भी ऋणक्षेपीय बनाना चाहिये ।

द्वितीयोदाहरणम् ।

यद्गुणा गणक पट्टिरन्विता वर्जिता च दशभिः पङ्क्तैः ।

स्यात् त्रयोदशहता निरग्रका तं गुणं कथय मे पृथक् पृथक् ॥ १ ॥

हे गणक वह गुणक बताओ, जिससे ६० को गुणा कर उसमें १६ जोड़
कर या घटाकर १३ से भाग देने पर निशेष होता है ।

भा अनेन शोधितौ तदा हा × ल - इ. हा. भा = भा. गु + चे - इ. हा. भा.
 वा हा (ल - इ. भा.) = भा (गु - इ. हा) + चे, अत्र यदि ल - इ. भा
 = ल, तथा गु - इ. हा = गु, तदा हा × ल = भा × गु + चे,

∴ ल = $\frac{\text{भा. गु} + \text{चे}}{\text{हा}}$ एतेन गुणलब्धयोः समं ग्राह्यमित्युपपन्नम् । पुनः कुट्टकरीत्या

हा × ल = भा. गु ± चे, अत्र यदि चे > हा तदा $\frac{\text{चे}}{\text{हा}} = \text{ल} + \frac{\text{चे. शे}}{\text{हा}}$

∴ चे = हा × ल + चे. शे, ∴ भा. गु ± हा × ल ± चे. शे = हा × ल

∴ ल = $\frac{\text{भा. गु} \pm \text{हा} \times \text{ल} \pm \text{चे. शे}}{\text{हा}} = \frac{\text{भा. गु} \pm \text{चे. शे}}{\text{हा}} \pm \text{ल}$, अत्र $\frac{\text{भा. गु} \pm \text{चे. शे}}{\text{हा}}$

या लब्धिः सा 'ल' अनेन चेपतक्षणलाभेन संस्कृता सती वास्तवा लब्धि-
 भवतीत्युपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

येन संगुणिताः पञ्च त्रयोविंशतिसंयुताः ।

वर्जिता वा त्रिभिर्भक्ता निरग्राः स्युः स को गुणः ॥ १ ॥

वह गुणक वताओ, जिससे ५ को गुणा कर उसमें २३ जोड़ या घटा कर
 ३ से भाग देने पर निश्शेष होता है ।

न्यासः । भाज्यः ५ । हारः ३ । क्षेपः २३ ।

अत्र वल्ली, $\left. \begin{array}{l} 1 \\ 23 \\ 0 \end{array} \right\}$ पूर्ववज्जातं राशिद्वयम् ३६ । एतौ भाज्यहाराभ्यां
 तष्टौ । अत्राधोराशौ २३ त्रिभिस्तष्टे सप्त लभ्यन्ते
 ऊर्ध्वराशौ ४६ पञ्चभिस्तष्टे नव लभ्यन्ते तत्र नव न ग्राह्याः । गुणलब्धयोः
 समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलमिति । अतः सप्तैव ग्राह्याः । एवं जाते
 गुणाप्ती २।११ क्षेपजे तक्षणाच्छुद्धे इति त्रयोविंशतिशुद्धौ जाता विपरीत-
 शोधनादवशिष्टा लब्धिः ६ । शुद्धौ जाते १।६ ।

इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती । धनर्णयो-
 रन्तरमेव योग इति द्विगुणितौ स्वस्वहारौ क्षेप्यौ यथा धनलब्धिः स्या-
 दिति कृते जाते गुणाप्ती ७।४ । एवं सर्वत्र । अथवा हरतष्टे धनक्षेपे इति-

न्यासः । भाज्यः ५ । हारः ३ । क्षेपः २ ।

पूर्ववज्जाते गुणाप्ती २।५ । एते स्वहराभ्यां विशोधिते शुद्धे जाते १।१ ।

जहाँ चेष नहीं हो, या हार से चेष में भाग देने पर निःशेष होता हो, वहाँ गुणक शून्य होता है और चेष में हर से भाग देने पर लब्धि होती है।

उपपत्ति:—यत्र कुट्टकोद्धारणे चेषाभावस्तत्र वर्यां चेषस्थाने शून्यमेवं तदधोऽपि शून्यमेव तेन तत्र स्वोऽधोऽहतेऽन्यनेत्यादिना लब्धिगुणौ शून्या भवतः। एवं यत्र हरोद्भूतः चेषः शुद्धयेत्त्रापि लब्धिगुणौ शून्यौ, परञ्च 'हरतष्टे धनचेषे' इत्यादिना चेषतच्छणलाभाद्या लब्धिः लब्धिः स्यात्सा तु चेषतच्छणलाभ-तुर्यैवातो हारहृतः चेषः फलमित्युपपन्नम्।

उदाहरणम्।

येन पञ्चगुणिताः खसंयुताः पञ्चपट्टिसहिताश्च तेऽथ वा।

स्युखयोदशहता निरग्रकास्तं गुणं गणक कीर्तयाशु मे ॥ १ ॥

वह गुणक चताभो, जिससे ५ को गुणा कर उसमें शून्य अथवा ६५ जोड़ कर १३ से भाग देने पर निःशेष होता है।

न्यासः। भाज्यः ५। हारः १३। चेषः ०

ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र चेषो हारहृतः फलमिति। चेषाभावे गुणा-
प्ती०। ० इष्टाहत इति अथवा १३।५। वा २६।१०।

न्यासः। भाज्यः ५। हारः १३। चेषः ६५।

चेषः शुद्धेद्धरोद्भूतः। ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र चेषो हारहृतः फलमिति
जाते गुणाप्ती०। ५। वा १३। १०। अथवा २६। १५। इत्यादि।

उदाहरण—भाज्य ५ हार १३ और चेष ० हैं। अब सूत्र के अनुसार गुणक शून्य हुआ और हार १३ से चेष ० में भाग देने पर लब्धि भी शून्य ही आई। इष्ट १ मान कर 'इष्टाहतस्वस्वहरेण' इत्यादि सूत्र से लब्धि ५ और गुणक १३ हुए। एवं २ इष्ट पर से लब्धि और गुणक क्रम से १० और २६ होते हैं। यदि चेष ६५ हो, तो हार १३ से भाग देने पर चेष निःशेष होता है, अतः गुणक शून्य और हार १३ से चेष ६५ में भाग देने पर भागफल ५ लब्धि हुई। एवं इष्ट १ और २ पर से 'इष्टाहतस्वस्वहरेणयुक्ते' इत्यादि रीति से लब्धि गुणक १०।१३ और १५।२६ होते हैं।

दृढास्तेनात्र ल, गु ज्ञेपेग निःशेषौ भवतोऽतो यदि $\frac{ल}{ज्ञे} = लं$, एवं $\frac{गु}{ज्ञे} = गुं$,
तदा ल = ल. ज्ञे, गु = गु. ज्ञे, ∴ हा. ज्ञे. लं = भा. ज्ञे. गुं = ज्ञे,

∴ हा. लं = भा. गुं = १ ∴ लं = $\frac{भा. गुं = १}{हा}$ अत्रापि कुट्टकोक्त्या लब्धिगुणौ

ज्ञेपेग गुणितौ तदा वास्तवौ भवतोऽत उपपन्नम् ।

प्रथमोदाहरणे दृढभाज्यहारयो रूपज्ञेपयोर्न्यासः । भाज्यः १७ ।
हारः १५ । ज्ञेपः १ । अत्र गुणात्नी ७ । ८ । एते त्विष्टज्ञेपेण पञ्चकेन
गुणिते स्वहारतष्टे च जाते ५ । ६ । अथवा रूपशुद्धौ गुणात्नी ७ । ८ ।
तक्षणाच्छुद्धे जाते गुणात्नी ८ । ६ । एते पञ्चगुणे स्वहारतष्टे च जाते
१० । ११ । एवं पष्टिविशुद्धौ । एवं सर्वत्र ।

उदाहरण—भाज्य १७ हार १५ और ज्ञेप ५ के स्थान में १ कल्पना
किया । अब उक्तीति से गुणक और लब्धि क्रम से ७ और ८ हुए । इनको
अभीष्ट ज्ञेप ५ से गुणा कर अपने-अपने हार से भाग देने पर शेष गुणक ५
और लब्धि ६ हुए । वा ऋणात्मक १ ज्ञेप कल्पना करने से गुणक ७ और
लब्धि ८ होते हैं । इनको अपने-अपने तत्त्व में घटाने से गुणक और लब्धि
क्रम से ८ और ९ हुए । इनको अभीष्ट ज्ञेप ५ से गुणा कर अपने-अपने हार
से भाग देने पर शेष गुणक १० और लब्धि ११ हुए । इसी तरह ६० ऋणज्ञेप
में समझना चाहिए ।

अस्य ग्रहगणिते उपयोगस्तदर्थं किञ्चिदुच्यते ।

कल्प्याऽथ शुद्धिर्विकलावशेषं पष्टिश्च भाज्यः कुदिनानि हारः ।

तज्जं फलं स्युर्विकलागुणस्तु लिप्ताग्रमश्माच्च कला लवाग्रम् ॥११॥

एवं तदूर्ध्वञ्च तथाऽधिमासावमाग्रकाभ्यां दिवसा र्वीन्द्रोः ॥१२॥

इस सूत्र से ग्रह के विकलाशेष पर से ग्रह और अहर्गंग का साधन किया
गया है । इसमें भाज्य ६०, हार कुदिन और ज्ञेप ऋणात्मक विकला-शेष मान
कर कुट्टक की रीति से लब्धि विकला और गुणक कला-शेष होगा । बाद में
कला शेष को ऋणात्मक ज्ञेप मानकर उक्त भाज्य और हर पर से ही कुट्टक
द्वारा लब्धि कला और गुणक भाग-शेष होगा । एवं भाज्य ३० हार कुदिन

एवं राशिशेषं शुद्धिः । द्वादश भाज्यः । कुदिनानि हारः । फलं गत-
राशयः । गुणो भगणशेषम् ।

कल्पभगणा भाज्यः । कुदिनानि हारः । भगणशेषं शुद्धिः फलं गत-
भगणाः । गुणोऽहर्गणः स्यादिति ।

अस्योदाहरणानि त्रिप्रश्नाध्याये ।

एवं कल्पाधिमासा भाज्यः । रविदिनानि हारः । अधिमासशेषं शुद्धिः ।
फलं गताधिमासा गुणो गतरविदिवसाः ।

एवं युगावमानि भाज्यः । चान्द्रदिवसा हारः । अवमशेषं शुद्धिः । फलं
गतावमानि । गुणो गतचान्द्रदिवसा इति ।

उदाहरण—ग्रह का विकला-शेष ११ का ज्ञान है, तो ग्रह और अहर्गण
का ज्ञान करना है । अब सूत्र के अनुसार भाज्य ६० कुदिन १९ हार और
विकला-शेष ११ को ऋणात्मक चेष मान कर कुट्टक-द्वारा लब्धि २९ और
गुणक ८ हुए । इनको ऋण-क्षेपीय बनाने के लिये अपने २ तक्षण में घटाने
से लब्धि ३१ विकला और गुणक १० कला-शेष हुए । अब कला-शेष को
ऋण-क्षेप मान कर उक्त भाज्य और हर पर से बल्ली-द्वारा ऊर्ध्वाङ्क १९० और
अधराङ्क ६० हुए । इनको अपने २ तक्षण से तटित करने से लब्धि १० और
गुणक ३ हुए । इनको ऋण-क्षेपीय बनाने के लिये अपने २ तक्षण में घटाने
पर लब्धि ५० कला और गुणक १६ अंश-शेष हुए । अब अंश-शेष को चेष
मान कर भाज्य ३० और हार १९ पर से कुट्टक-द्वारा लब्धि २६ अंश और
गुणक १७ राशि-शेष हुआ । इसी तरह उक्त रीति से क्रिया करने पर अन्त
में लब्धि ६ गत भगण और गुणक १३ अहर्गण हो जायगा । आगे अवमशेष
और अधिशेष पर से उक्त रीति-द्वारा गत चान्द्र-दिन और गत रवि-दिन का
ज्ञान क्रम से करना चाहिये ।

संश्लिष्टकुट्टके करणसूत्रं वृत्तम् ।

एको हरश्चेद्गुणकौ विभिन्नौ तदा गुणैक्यं परिकल्प्य भाज्यम् ।

अग्रैक्यमग्रं कृत उक्तवद्यः संश्लिष्टसंज्ञः स्फुटकुट्टकोऽसौ ॥ १३ ॥

एकः हरः चेत् गुणकौ विभिन्नौ तदा गुणैक्यं भाज्यं परिकल्प्य अग्रैक्यं

अथ गणितपाशे निर्दिष्टाङ्कैः संख्याया विभेदे
करणसूत्रं वृत्तम् ।

स्थानान्तमेकादिचयाङ्कघातः संख्याविभेदा नियतैः स्युरङ्कैः ।
भक्तोऽङ्कमित्याङ्कसमासनिघ्नः स्थानेषु युक्तो मितिसंयुतिः स्यात् ॥

स्थानान्तं एकादिचयाङ्कघातः नियतैः अङ्कैः संख्याविभेदाः स्युः । स अङ्क-
ममासनिघ्नः अङ्कमित्या भक्तः, स्थानेषु युक्तः तदा मितिसंयुतिः स्यात् ।

अङ्क के स्थान पर्यन्त एकादि अङ्कों का घात करने से संख्या के भेद होते हैं । उसे अङ्कों के योग से गुणा कर स्थानाङ्क संख्या से भाग देकर लब्धि को अङ्क तुल्य स्थान में उत्तरोत्तर एक संख्या बढ़ा कर लिख करके योग करने से सभी संख्या भेदों का योग होता है ।

उपपत्तिः—कल्प्यते $p = \text{संख्याङ्कः} = १$ स्थानसंख्याभेदः । अथ चेत्
संख्यायां स्थानद्वयं भवेत्तदा तत्र द्वितीयोऽङ्कः = च । अस्य पूर्वाङ्कपार्श्वयोः पृथक्
निवेशेन द्वौ भेदौ भवतस्तेनानुपातः—एकाङ्कस्यैकपार्श्वं द्वितीयाङ्कनिवेशेन यद्येको
भेदस्तदा पार्श्वद्वयनिवेशेन किमिति स्थानद्वयसंख्याभेदौ यथा, पच । चप यदि
संख्यायां स्थानत्रयं भवेत्तदा तृतीयाङ्कस्य पूर्वकथित प्रत्येक भेदस्यादिमध्याव-
सानेषु स्थापनेन त्रयस्त्रयोभेदा भवन्ति । ततोऽनुपातेन—स्थानत्रयाणां संख्या-
भेदा भवन्ति । यथा—यद्येकभेदेन त्रयो भेदा भवन्ति तदा पूर्वसाधितस्थान-
द्वयभेदेन किमिति जाता भेदाः । एवं चतुर्थाङ्कस्य स्थानत्रयसंख्याभेदेषु प्रत्येक-
स्यादिमध्योपान्तेषु स्थापनेन चत्वारश्चत्वारो भेदा भवन्ति, तेनानुपातो यद्येक-
भेदेन चत्वारो भेदास्तदा स्थानत्रयसंख्याभेदैः किमिति जाताः स्थानचतुष्टय-
संख्याभेदाः । एवमग्रेऽपि ज्ञेयमेतेनोपपन्नं पूर्वार्धम् ।

पूर्वसाधितभेदेष्वेकाद्यङ्कस्थानीयाङ्कयोगनिमित्तं तु स्थानतुल्याङ्कानां योगोऽ-
ङ्कयोगस्तेनानुपातः—स्थानमितौ यद्यङ्कयोगतुल्योयोगस्तदोक्तभेदमितौ किमित्ये-
कस्थानीयाङ्कयोगः । अथैकस्थानीयाङ्कयोगतुल्य एव दशाद्यस्थानीयाङ्कयोगोऽपि
तेषां पुनः पुनर्विन्यासात् । तेनास्यैव स्थानान्तरेण योगः सर्वभेदयोगो भवितु-
मर्हतीत्यत उपपन्नं सर्वम् ।

से गुणा कर $६ \times २० = १२०$ को स्थान-संख्या ३ से भाग देने पर ४० हुआ। इसे तीन जगह क्रम से एक स्थान बढ़ा कर रख के योग करने पर $\left(\begin{matrix} १० \\ ४० = ४४० \end{matrix} \right)$ संख्याओं का योग हुआ। तीसरे उदाहरण में २ से ३ तक का घान करने से ४०३२० संख्या-भेद के अङ्कों के योग ४४ से गुणा कर अङ्क मिलि ८ से भाग देने पर २२१०६० हुआ। इसको ८ स्थान तक एक जगह बढ़ा कर लिख के योग करने से संख्याओं का योग २२६३९९९९५३६० हुआ।

उदाहरणम् ।

पाशाङ्कुशाहिडमरुककपालशूलैः खट्वाङ्गशक्तिशरचापयुतैर्भवेन्ति ।
अन्योऽन्यहस्तकलितैः कृति मूर्तिभेदाः शम्भोर्हरिवि गदारिस्तरोजराङ्गैः ॥

श्रीशङ्करजी के दशों हाथ में पाश, अङ्कुश, सर्प, डमरु, कपाल, त्रिशूल, खट्वाङ्ग, शक्ति, शर और घनुष को परस्पर बदल कर रखने से इनके मूर्ति-भेद कितने होंगे। इसी प्रकार विष्णु के चारों हाथों में गदा, चक्र, कमल और शङ्ख को परस्पर बदल कर रखने से इनकी मूर्ति के भेद बताओ।

न्यासः। स्थानानि १०। जात मूर्तिभेदा ३६२५५००। एवं हेरेच्च २१।

उदाहरण—पहले प्रश्न में १० अत्र हैं, अतः एकादि दश अङ्कों का घान करने से ३६२५५०० शङ्कर के मूर्तिभेद हुए। विष्णु के ४ अत्र हैं अतः ४ का भेद २४ हुआ।

विशेषे करणसूत्रं वृत्तम् ।

यावत्स्थानेषु तुल्याङ्कास्तद्भेदैस्तु पृथक्कृतैः ।

प्राग्भेदा विहता भेदास्तत्संख्यैक्यञ्च पूर्ववत् ॥ ? ॥

यावत् स्थानेषु तुल्याङ्काः स्युः पृथक् कृतैः तद्भेदैः प्राग्भेदाः विहताः तदा भेदा भवन्ति । तत्संख्यैक्यञ्च पूर्ववत् ज्ञेयम् ।

संख्या में जितने अङ्क समान हों, उतने अङ्कों के पृथक् भेद लाकर उससे पूर्व-साधित भेद संख्या में भाग देने पर भेद की संख्या होगी। संख्या का योग पूर्वोक्त रीति से ही साधन करना चाहिये।

५ ४ ५ ५ ८ । ५ ८ ५ ५ ४ । एवं विंशति ।

अथ संख्यैक्यञ्च ११६६६८८ ।

उदाहरण—प्रथम प्रश्न में (२, २, १, १) चार अङ्क हैं, अतः पूर्व रीति से भेद (१ × २ × २ × ४) = २४ हुआ । अब तुल्य दो, दो अङ्कों के भेद २ और २ अर्थात् ४ से, २४ में भाग देने से ६ वास्तव भेद हुआ । द्वितीय उदाहरण में पहली रीति से एकादि ५ अङ्कों का घात करने से १२० हुआ । इस उदाहरण में तीन स्थान ५, ५, ५ तुल्य हैं, अतः इन तीनों के भेद ६ से १२० में भाग देने पर २० वास्तव भेद हुआ । संख्यैक्य जानने के लिए पहले उदाहरण के भेद ६ को अङ्क योग ६ से गुणा कर उसे स्थान संख्या ४ से भाग देने पर ९ हुआ । इसको एक-एक स्थान बढ़ा कर ४ स्थानों में लिख कर जोड़ तो ९९९९ प्रथम प्रश्न का संख्यैक्य हुआ । इसी तरह दूसरे उदाहरण के भेद २० को अङ्कयोग २० से गुणाकर उसे स्थान संख्या ५ से भाग देने पर लब्धि १०८ हुई । इसे एक स्थान बढ़ा कर ५ स्थानों में लिख कर योग करने से संख्यैक्य ११९९९८८ हुआ ।

अनियताङ्कैरतुल्यैश्च विभेदे करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

स्थानान्तमेकापचितान्तिमाङ्कघातोऽसमाङ्कैश्च मितिप्रभेदाः ।

असमाङ्कैः स्थानान्तं एकापचितान्तिमाङ्कघातः मितिप्रभेदाः स्युः ।

स्थानान्त पर्यन्त अन्त के अङ्क में एक-एक घटा कर रखे हुये अङ्कों का घात करने से दिये हुए अत्रिस्त और अतुल्य अङ्कों की संख्या के भेद होते हैं ।

उपपत्तिः—अत्रान्तिमाङ्को नवैव ग्राह्योऽङ्कानां नवमितत्वात् । अथ संख्यायां यद्येकं स्थानं भवेत्तदा नवभिरङ्कैर्नवभेदा भवन्ति तत्राङ्कस्यानियतत्वात् । यदि संख्यायां स्थानद्वयं तदा पूर्वकथितैकस्थानभेदेषु प्रत्येकेषु निजातिरिक्ताङ्कस्थापनेनैकोनान्तिमाङ्कतुल्या भेदास्तथा स्थानत्रयात्मकसंख्यायां स्थानद्वयाङ्कभेदेषु प्रत्येकेषु निजाङ्कद्वयातिरिक्ताङ्कस्थापनेन द्वयूनान्तिमाङ्कसमाभेदा भवन्ति । ततोऽनुपातेन—स्थानद्वयसंख्या भेदाः = $\frac{(\text{अन्तिम अङ्क} - १)}{१ \text{ भेद}}$ । एवं स्थान-

त्रयसंख्याभेदा भवन्ति, यथा—स्थानद्वयभेदेऽप्येकभेदेन यदि द्वयूनान्तिमाङ्कसमाभेदास्तदा सर्वेषु स्थानद्वयभेदेषु किमिति जाता भेदाः—

विस्तार के भय से मैंने संक्षेप में कहा क्यों कि गणित रूपी समुद्र का अन्त नहीं है ।

उपपत्ति:— यदि शून्यरहितसंख्यायां स्थानमितिद्वयादिमिता तथा स्थानाङ्कयोगस्तु स्थानमितितुल्यस्तदधिको वा तदैवास्य सूत्रस्य प्रयोजनमिति स्पष्टमेवातो यदि संख्यायां स्थानद्वयं तथाङ्कयोगः = २ तदा शून्यरहिता संख्यैकैकैकादश भवितुमर्हति तेन संख्याभेदः = १ = (अङ्कयोग - १) । एवमेव तत्रैव यद्यङ्कयोगः = ३ तदा शून्यवर्जिते संख्ये १२, २१ अतः संख्याभेदौ = २ = (अङ्कयोग - १) । यदि च तत्रैवाङ्कयोगः = ४, तदा संख्याः १३, २२, ३१ । अतः संख्याभेदाः = ३ = (अङ्कयोग - १) । एवमग्रेऽपि संख्यायां स्थानद्वये रूपोनयोगतुल्याः संख्याभेदा भवन्ति । यदि संख्यायां स्थानत्रयं तथाङ्कयोगः = ३ तदा शून्यवर्जितसंख्या = १११ । अतः संख्याभेदः = १ = द्यूनाङ्कयोगस्य सङ्कलितम् । तत्रैव यद्यङ्कयोगः = ४ तदा संख्याः = ११२, १२१, २११ । अतः संख्याभेदाः = ३ = द्यूनाङ्कयोगस्य सङ्कलितम् । तत्रैव यद्यङ्कयोगः = ५, तदा संख्याः = ११३, १२२, १३१, २२१, ३११ । अतः संख्याभेदाः = द्व्यूनाङ्क-सङ्कलिततुल्याः । एवमग्रेऽपि संख्यायां स्थानत्रये द्व्यूनाङ्कयोगस्य सङ्कलिततुल्या भेदा भवन्त्यतो द्यूनाङ्कयोगपदे सैकपदघ्नपदार्धमित्यादिना सङ्कलितस्वरूपम्

$$= \frac{(\text{अं. यो} - १)}{१} \times \frac{(\text{अं. यो} - २)}{२} = \text{संख्या भेद} ।$$

यदि संख्यायां स्थानचतुष्टयं तथाङ्कयोगः = ४, तदा संख्या = ११११ । अतः संख्याभेदः = १ । यदि तत्राङ्क योगः = ५ तदा संख्याः = १११२, ११२१, १२११, २१११ । अतः संख्याभेदाः = ४ । यदि तत्रैव अङ्कयोगः = ६ तदा संख्याः = १११३, ११२२, ११३१, १२१२, १२२१, १३११, २११२, २१२१, २२११, ३१११ । अतः संख्याभेदाः = १० । एवमग्रेऽपि स्थानचतुष्टये द्यूनाङ्क-योगस्य सङ्कलितैक्यसमा भेदा दृश्यन्तेऽतस्त्व्यूनाङ्कयोगपदे सैकपदघ्नपदार्धमित्यादिना सङ्कलितस्य स्वरूपम् =

$$\frac{(\text{अङ्कयोग} - २)}{२} \frac{(\text{अङ्कयोग} - ३)}{३} । ततः साद्वि-$$

युतेन पदेनेत्यादिना सङ्कलितैक्यस्य रूपम्

$$= \frac{(\text{अं. यो} - २)}{२} \frac{(\text{अं. यो} - ३)}{३} \frac{(\text{अं. यो} - १)}{१} = \text{सं. भेदाः}$$

$$= \frac{(\text{अं. यो} - १)}{१} \times \frac{(\text{अं. यो} - २)}{२} \times \frac{(\text{अं. यो} - ३)}{३} \quad \text{एवमग्रेऽप्यत}$$

अस्मिन् अङ्कपाशे न गुणः, न हरः, न कृतिः, न घनः अस्ति, तथापि दुष्टानां गवितगणकवट्टनां पृष्टः सन् अवश्यं पातः स्यात् ।

इस अङ्कपाश में न गुणक है, न हर है, न वर्ग है और न घन है, तो भी दुष्ट अभिमानी गणक वट्ट को इसका प्रश्न पूछने पर निश्चय शिर झुक जाता है ।

वेपां (छात्राणां, यूनां च), सुजातिगुणवर्गविभूषिताङ्गी (भागप्रभाग-गुणकर्मवर्गादियुक्ता, वा सत्कुलोत्पन्नसुशीलादिगुणगणालङ्कृतशरीरा) शुद्धाखिलव्यवहृतिः (शुद्धसकलमिश्रकादिव्यवहारपुक्ता शुद्धाखिलव्यवहारवती वा) सरसोक्ति (साहित्यिकं प्रश्नं रसमयीं मधुरां वाचं वा) उदाहरन्ती (कथयन्ती आलपन्ती वा) लीलावती (एतदाख्यं गणितं वा हास्यविलासादिरत्तिक्रीडाभिज्ञा प्रियतमा) कण्ठशक्ता (कण्ठस्था, हृदयलम्बा वा) अस्ति तेषां (छात्राणां यूनाञ्च) इह (अस्मिन् लोके) खलु (निश्चयेन) सुखसम्पत् सदैव वृद्धि (उपचयं) उपैति (प्राप्नोति) ।

जिन छात्रों को भाग-प्रभाग, गुणक वर्ग आदि कर्मों से तथा शुद्ध मिश्रक श्रेणी आदि व्यवहारों से युक्त सरस वात को कहती हुई लीलावती नाम की पुस्तक का अभ्यास है, उन्हें हमेशा इस लोक (दुनियाँ) में सुख और सम्पत्ति की वृद्धि होती है ।

अथवा

जिन युवकों की अच्छे वंश में उत्पन्न, सुशील आदि गुणों से युक्त शुद्ध व्यवहार वाली एवं कोमल तथा मधुर भाषण करने वाली पत्नी मिलती है, उनकी सुख-सम्पत्ति निश्चय ही इस जगत में हमेशा बढ़ती रहती है । कराष्टगजभूतुल्ये शालिवाहनवत्सरे । 'वैद्यनाथ' प्रसादेन टीकेयं पूर्णतां गता ॥१॥ व्यावहारिकसत्तायां चतुरा गुण भूषिता । 'लीलावतीव' टीकेयं पठतामतिमोददा ॥२॥

इति मिथिलादेशावयवद्वरभङ्गामण्डलान्तर्गत 'हिरणी' ग्रामवासि पण्डित-

श्रीलक्षणलालझाविरचितसान्वयसोपपत्तिसोदाहरणनूतन-

गणितोपेततत्त्वप्रकाशिकाहिन्दीव्याख्योपेता

'लीलावती' समाप्ता ।



मीर	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
दि.प्रा.	१०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
ग्राम	१३३	१६६	१९९	२३२	२६५	२९८	३३१	३६४	३९७	४३०
मीर	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०
दि.प्रा.	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९
ग्राम	२६५	१९७	१३०	६३	१९६	१३०	६३	१९६	१३०	६३
मीर	२१	२२	२३	२४	२५	२६	२७	२८	२९	३०
दि.प्रा.	१९	२०	२१	२२	२३	२४	२५	२६	२७	२८
ग्राम	५९९	५२८	४६१	३९४	३२७	२६०	१९३	१२६	६०	१९३
मीर	३१	३२	३३	३४	३५	३६	३७	३८	३९	४०
दि.प्रा.	२९	२९	३०	३१	३२	३३	३४	३५	३६	३७
ग्राम	१०६	८९९	७३२	५६५	३९८	२३१	६४	१९७	३३३	१६६

मन से छिण्डल आदि जातने की सारिणी:—

मन	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
छिण्डल	०	०	१	१	१	२	२	२	३	३
दि.प्रा.	३०	७२	११	३२	८६	२३	६१	१०	३५	७३
ग्राम	३२२	६३८	१०३	२१०	३२३	४३५	५४७	६५९	७७०	८८२
मन	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	२००
छिण्डल	०	११	१२	१८	२२	२६	२९	३३	३७	४३
दि.प्रा.	४६	१९	२३	३६	४९	६२	७५	८८	१०१	११४
ग्राम	२८३	७२५	१३७	२०९	२८१	३५३	४२५	४९७	५६९	६४१

गणित सम्बन्धी कुछ पाश्चात्य शब्दों के नाम

जोड़ = Addition (एडिशन)

घटाव = Subtraction (सबट्रैक्शन)

गुणा = Multiplication (मल्टीप्लीकेशन)

भाग = Division (डिभिजन)

वर्ग = Square (स्क्वायर)

वर्गमूल = Square root (स्क्वायर रूट)

घन = Cube (क्यूब)

घनमूल = Cube root (क्यूब रूट)

भिन्न = Fraction (फ्रैक्शन)

अंश = Numerator (न्यूमेरेटर)

हर = Denominator (डिनोमिनेटर)

महत्तमसापवर्तन = Greatest Common Measure (ग्रेटेस्ट कौमन मीजर)

G. C. M.

लघुत्तमावर्त्य = Lowest Common Multipul (लोवेस्ट कौमन मल्टीपुल)

अवर्तन = Common Factor (कौमन फॅक्टर)

पूर्णाङ्क = Whole number (होल नम्बर)

दशमलव = Decimal Fraction (डेसीमल फ्रैक्शन)

त्रैराशिक = Rule of three (रूल आफ थ्री)

व्यस्त त्रैराशिक = Inverse rule of three (इन्वर्सरूल आफ थ्री)

मिश्रयोग = Compound Addition (कम्पौन्ड एडिशन)

मूलधन = Principal (प्रिन्सिपल)

मिश्रधन = Amount (एमौन्ट)

कलान्तर = Interest (इन्टरेस्ट)

श्रेढी (योगान्तर) Arithmetical Progression (एरिथमेटिकल प्रोग्रेशन)

श्रेढी (गुणोत्तर) Geometrical Progression (ज्यामेट्रीकल प्रोग्रेशन)

विलोमरीति = Converse method (कन्वर्स मेथड)

क्षेत्रफल = Area (एरीआ)

श्रेढीफल = श्रेढी का योग Addition of series (एडिशन आफ सीरीज)

‘लीलावती’ सम्बन्धी कतिपय संकेतयुक्तशब्दों का अर्थ

- संकलित = जोड़ ।
व्यकलित = घटाव ।
योज्य = जिसमें जोड़ा जाय ।
योजक = जोड़ने वाला अङ्क ।
शोध्य = जिसमें घटाया जाय ।
शोधक = जो घटाया जाय ।
गुणन = गुना ।
गुण्य = गुना करने योग्य ।
गुणक = जिससे गुना किया जाय ।
भागहार = संख्या विशेष को कई अंशों में बाँटने की रीति ।
भाज्य = बाँटने योग्य ।
भाजक = भाग करने वाला ।
छेद = हर ।
वर्ग = समान दो अङ्कों का घात ।
वर्गमूल = जिसका वर्ग किया हो ।
घन = समान तीन अङ्कों का घात ।
घनमूल = जिसका घन किया हो ।
भिन्न = वह संख्या जो पूर्ण संख्या से कम हो ।
समच्छेद = हरों का समानोकरण ।
भिन्न परिकर्माष्टक = भिन्नाङ्कों के योगादि विधि ।
भागजाति = जिसमें हर और अंश दोनों पूर्णाङ्क हो ।
प्रभाग जाति = भाग का भी भाग लेकर गणित हो या हर और अंश दोनों अपूर्णाङ्क हो ।
भागानुबन्ध = अपने अंश से युत राशि ।

- भागानुवाह = अपने अंश से हीन राशि।
व्यस्त विधि = विलोम रीति ।
इष्टकर्म = कल्पित इष्ट वश राशिज्ञान की विधि ।
द्वीष्टकर्म = दो इष्टवश राशिज्ञान की रीति ।
शेषजाति = शेष के मिलाने, तुलना करने का कार्य या जो प्रश्न शेष से सम्बन्ध रखे ।
विरलेप जाति = जो प्रश्न भागद्वयान्तर से सम्बन्धित हो ।
संक्रमण = राशिद्वय के योग और अन्तर ज्ञान से राशि ज्ञान की विधि ।
वर्गकर्म = राशिद्वय के वर्ग योग या वर्गान्तर में एक घटाने पर वर्गमूल शेष निकालने की रीति ।
गुणकर्म = इष्ट गुणित अपने मूल से ऊन या युत दृश्य राशि से या केवल अपने अंशों से ऊन या युत दृश्य राशि वश राशिज्ञान की विधि ।
त्रैराशिक = तीन ज्ञात राशि वश चतुर्थ राशि जानने की विधि ।
प्रमाण = किसी अनुपात का प्रथम पद ।
प्रमाण फल = अनुपातीय द्वितीय पद ।
इच्छा = अनुपातीय तृतीय पद ।
इच्छा फल = अ० चतुर्थ पद ।
व्यस्त त्रैराशिक = इच्छा की वृद्धि में फल की कमी या इच्छा की कमी में फल की वृद्धि ।

अथोपसंहारश्लोकाः

स्वर्गादपि या गुर्वी धात्रीशक्तेः पराम्बायाः ।
 नम्रतया मिथिलोर्वी नित्यं धातुस्तुला-क्रोटी ॥ १ ॥
 यस्य गुरुतामाहुं दरभंगाया मिषेणैत्य ।
 मन्ये विष्णोः पूरपि शश्वत्सेवा-परो भाति ॥ २ ॥
 तस्यां कमला-त्रियुगानद्योर्मध्ये “कुशेश्वरो” यत्र ।
 कुश-मुनितपसा तुष्टो भूमेः सम्भूय शोभते शम्भुः ॥ ३ ॥
 क्रोशमिते तत्-पश्चिमदिग्भागे “श्री हिरण्यदा” देव्याः ।
 पीठे “हिरणी”त्याख्या-ख्यातो ग्रामो विराजतेऽद्यापि ॥ ४ ॥
 श्री-विद्यासम्पन्नैः सद्विप्रैः सेविते तस्मिन् ।
 उद्यद्दिनमणिकल्पः सत्संकल्पोऽल्पिताऽऽरातिः ॥ ५ ॥
 आसीत् शाण्डिल्यगोत्रोद्भूतो, नरसिंहसेवया पूतः ।
 “श्रीसन्तलालशर्मा” ज्ञोपाख्यः ख्यात-नामासौ ॥ ६ ॥
 तत्तनयत्रितयेषु, ज्येष्ठः श्रेष्ठो चरिष्टश्च ।
 जातः पट्कर्म-धर्मा “वल्लोशर्मा” महानात्मा ॥ ७ ॥
 साक्षाद् भारत-जगती “जगती देवी” बभूव तजाया ।
 तस्यां तदात्मजातः, सोऽहं दुर्दैव-पीडितो बाल्ये ॥ ८ ॥
 तातविहीनो दीनः क्षीणप्रज्ञोऽपि सद्गुरोः कृपया ।
 उयोतिस्तटिनी-विहरण-कलकादम्बोऽस्मि सम्वृत्तः ॥ ९ ॥
 तत्परिणतिरूपेयं टीका-रचिता मया ह्यत्र ।
 तेषामेव श्रेयो ये गुरवोऽद्भुः कलां मह्यम् ॥ १० ॥
 नव्योऽपि भव्यो गणितोऽतियत्ना-
 न्निवेशितोऽस्यां सरल-प्रणाख्या ।
 साकं पुराचीनमतेन, येन-
 विद्यार्थिनः स्युः सफलप्रयत्नाः ॥ ११ ॥
 लीलाधत्या इमां टीकां नात्रा तत्त्वप्रकाशिकाम् ।
 भव-रोग-भयघ्नन्तं वैद्यनाथं समर्पये ॥ १२ ॥
 (इति श्रीवैद्यनाथार्पणमस्तु)

१३. कस्यचित्पुरुषस्य स्वकर्मणि नियुक्तेन कर्मकरणे, कर्मकरणे प्रत्यहं रूप्यकमेकं भृतिः । अकरणे च प्रत्यहं पात्रोनरूप्यकम् दण्डत्वेन प्रत्यर्पणीयमिति समयवन्ध आसीत् । तत्समयवन्धेन कर्मकरणे पट्पञ्चाशदधिकत्रिंशत् (३५६) दिनानन्तरं रूप्यकारणामष्टादशाधिकशत(११८)मर्जितम् । अत्र कर्मदिन-संख्या का ?

१४. द्रुमत्रयं यः प्रथमेऽह्नि दत्त्वा दातुं प्रवृत्तो द्विचयेन तेन ।
शतत्रयं पष्ठधिकं द्विजेभ्यो दत्तं कियद्भिर्दिवसेर्वदाशु ॥

१५. अनियतत्वेऽपि नियतयोरेव कर्णयोरानयने ब्रह्मगुप्तेन कर्णाश्रितभुजघातैक-
येत्यादिना या प्रक्रिया प्रदर्शिता, तत्र गौरवप्रदर्शनमुखेन भास्फरोक्ताभीष्ट-
जात्यद्वयवाहुकोटय इत्यादि लघुक्रियया अभीष्टजात्यद्वयकल्पनया कर्णा-
साधनीयी ।

१६. शतं हतं येन युतं नवत्या विवर्जितं वा विहृतं त्रिपण्ड्या ।
निरग्रकं स्याद्द्वद मे गुणं तं स्पष्टं पठीयान् यदि कुट्टकेऽसि ॥

१७. पाशाङ्कुशाहिडमरुककपालशूलैः खट्वाङ्गशक्तिशरचापयुतैर्भवन्ति ।
अन्योऽन्यहस्तकलितैः कति मूर्तिभेदाः शम्भोर्हरिव गदारिसरोजशङ्खैः ॥
पद्यमिदं सगणितं व्याख्यायताम् ।

१८. केनचिःपुरुषेण विदेशं गत्वा कियद्दिनानन्तरमनुभूतं, यद् गुहाद् बहिरव-
स्थानकाले विदेशस्थितिदिनसङ्ख्यार्द्धतुल्यरूप्यकव्ययः प्रतिदिनमभूत् ।
यदि विदेशयात्रायां तस्य पुरुषस्य अष्टादशशत(१८००)रूप्यकाणां व्ययोऽ-
भवत्, तदा गुहाद्बहिरवस्थानदिनसङ्ख्या का ?

१९. बालकानां पञ्चशती (५००) त्रिषु गृहेषु स्थापिता अस्ति । तत्र लघुगृहे
समूहस्य ३/५ बालकाः सन्ति । बृहद्गृहे च लघुगृहगतबालकसंख्यायाः १/५
बालकाः सन्ति, तर्हि प्रत्येकगृहगतबालकसङ्ख्या आनेयाः ।

२०. यत्र त्रिभुजे भुजौ १०, १७ मही च ९ तत्र लम्बाबाधाफलानि साध्यानि ।

२१. मधुकरसमूहाद्द्वौ मधुकरौ- सरोवरस्थपद्मगती । अर्द्धं हस्तिगण्डे गतम् ।
समूहस्य मूलपरिमितसङ्ख्याका मधुकरा नवमल्लिकां गताः । अन्ते च
मधुकरद्वयं दृष्टमासीत्तदा समूहस्थमधुकरसङ्ख्या का ?

२८. यदि शतस्य वार्षिकं कलान्तरं ५ तदा चतुर्भिरञ्चैरस्य ६४८ मिश्रघनस्य किमिति प्रदर्शयताम् ।
२९. अशीत्या (८०) दिवसैः किञ्चित्कार्यं निष्पादयितुं केनचित्पुरुषेण त्रिंशत् (३०) कर्मकरा नियोजिताः । तैश्च कर्मकरैः पञ्चाशता (५०) दिनैः तत्कर्मणोऽर्धं ($\frac{1}{2}$) निष्पादितम् । तर्हि कर्मणो यथाकालपूर्त्यर्थं अन्ये कति कर्मकराः नियोजयितव्यास्तद्वद ।
३०. पञ्चवर्गसमे कर्णे दोःकोट्योरन्तरं यदा ।
सप्तैन्दुसदृशं मित्र ! भुजकोटी पृथग् वद ॥
३१. दशविस्तृतिघृत्तान्तर्यत्र ज्या पण्मता सखे ।
तत्रेषु वद त्राणाज्ज्यां ज्यात्राणाभ्यां च विस्तृतिम् ॥
३२. शङ्कुप्रदीपान्तरभृस्त्रिहस्ता दीपोच्छ्रितिः सार्धंकरत्रया चेत्,
शङ्कोस्तदाऽर्काङ्गुलसम्मिमेत्यत्र प्रभा का ।



निग्रघन के $\frac{3}{1000}$ = उस मूलधन के $\frac{3}{1000} \times \frac{3}{1000}$ = उस मूलधन के $\times (\frac{3}{1000})^2$ । इस तरह ३ वर्ष के बाद किसी मूलधन का निग्रघन = उस मूलधन के $(\frac{3}{1000})^3$ इसी तरह जाने का समझना चाहिये ।

∴ ३०० रु० का ५ वर्ष में निग्रघन जानने के लिये हम ३०० रु० के $(1000)^3$ से गुणाकर गुणनफल को $(100)^3$ से भाग देंगे ।

$$\therefore \frac{300 \times 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000}{1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000} = \frac{3 \times 1000}{1000}$$

$$= ३००००८२२२२२२ = ५ वर्ष में निग्रघन ।$$

प्रश्नान्तर—

- (१) ५५० रु० का ३ वर्ष में ४३ रु० सैकड़ा व्याज की दर से चक्रवृद्धि लगाकर निग्रघन बताओ ।
- (२) ४०० रु० पर ५ वर्ष में ३ रु० सैकड़ा व्याज की दर से जो चक्रवृद्धि और साधारण व्याज हो उनका अंतर बताओ ।
- (३) चित्रना धन चक्रवृद्धि पर ४ पौ० सैकड़े व्याज की दर से २ वर्ष में २७० पौ० ८ सि० निग्रघन हो जाय ।
- (५) ४ रु० सैकड़ा व्याज की दर से २ वर्ष में किसी धन पर जो चक्रवृद्धि और साधारण व्याज मिलते हैं । उनका अंतर १ रु० है तो वह धन का धन है ।

निश्चान्तरे करणसूत्रम् ।

अथ प्रमाणगुणिताः स्वकाला व्यतीतकालमकालोद्भूतास्तै ।

स्वयोगमक्ताश्च विभिन्नानिः प्रयुक्तखण्डानि पृथग् भवन्ति ॥२॥

अथ प्रमाणैः (प्रमाणधनैः) गुणिताः स्वकालाः व्यतीतकालमकालोद्भूताः ते विभिन्नानिः स्वयोगमक्ता पृथग् प्रयुक्तखण्डानि भवन्ति ।

अरने-अरने प्रमाण धनों से गुने हुये अरने-अरने कालों को व्यतीत कालों से गुने हुये कालों से भाग दें । उनको निग्रघन से गुणाकर अरने योग से भाग देने पर अलग-अलग प्रयुक्त के (मू० पर दिये हुये धन का) दुगुण हो जायेंगे ॥ १ ॥

मिश्रधन के $\frac{1000}{3} =$ उस मूलधन के $\frac{1000}{3} \times \frac{1000}{3} =$ उस मूलधन के $\times (\frac{1000}{3})^2$ । इस तरह ३ वर्ष के बाद किसी मूलधन का मिश्रधन = उस मूलधन के $(\frac{1000}{3})^3$ इसी तरह आगे भी समझना चाहिये ।

∴ ३०० ६० का ५ वर्ष में मिश्रधन जानने के लिये हम ३०० ६० को $(100)^5$ से गुणाकर गुणनफल को $(100)^5$ से भाग देते हैं ।

$$\therefore \frac{300 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100}{(100)^5} = \frac{3 \times 100}{1} \\ = ३४७०७८२२२२२९ = ५ वर्ष में मिश्रधन ।$$

प्रश्नान्तर—

- (२) ७५० ६० का ३ वर्ष में $४\frac{१}{२}$ ६० सैकड़ा व्याज की दर से चक्रवृद्धि लगाकर मिश्रधन बताओ ।
- (३) ४०० ६० पर ५ वर्ष में ३ ६० सैकड़ा व्याज की दर से जो चक्रवृद्धि और साधारण व्याज हो उनका अंतर बताओ ।
- (४) कितना धन चक्रवृद्धि पर ४ पौ० सैकड़े व्याज की दर से २ वर्ष में २७० पौ० ८ शि० मिश्रधन हो जाय ।
- (५) ४ ६० सैकड़ा व्याज की दर से २ वर्ष में किसी धन पर जो चक्रवृद्धि और साधारण व्याज मिलते हैं । उनका अंतर १ ६० है तो वह कौन सा धन है ।

मिश्रान्तरे करणसूत्रम् ।

अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला व्यतीतकालप्रफलोद्भूतास्ते ।

स्वयोगभक्ताश्च विमिश्रनिष्ठाः प्रयुक्तखण्डानि पृथग् भवन्ति ॥१२॥

अथ प्रमाणैः (प्रमाणधनैः) गुणिताः स्वकालाः व्यतीतकालप्रफलोद्भूताः ते विमिश्रनिष्ठा स्वयोगभक्ता पृथक् प्रयुक्तखण्डानि भवन्ति ॥

अपने-अपने प्रमाण धनों से गुणे हुये अपने-अपने कालों को व्यतीत कालों से गुणे हुये फलों से भाग दें । उनको मिश्रकाल से गुणाकर अपने योग से भाग देने पर अलग-अलग प्रयुक्त के (सूत्र पर दिये हुये धन का) दुम्बे हो जायेंगे ॥ १ ॥

वदाकर पंक्ति में लिखने पर २८ हुआ। इसका आधा १४ है, अतः उपरोक्त मूल ठीक है।

(३) $\overset{1}{\underset{1}{\text{८८२०९}}}$ का वर्ग मूल निकालना है, अतः अन्तिम विपमाङ्क ८ में २ का वर्ग घटा शेष ४ पर ८ उतरा तो समाङ्क ४८ हुआ। अब २ को दूना कर ४८ में भाग दिया तो लब्धि ९ और शेष १२ हुआ। १२ ऊपर २ विपमाङ्क उतरा तो १२२ हुआ। इसमें ९ का वर्ग ८१ को घटाया तो ४१ शेष बचा। ४१ ऊपर ० उतरा तो समाङ्क ४१० हुआ। अब लब्धि के स्थान में २९ अङ्क है। अतः इसको दूना कर समाङ्क ४१० में भाग दिया तो लब्धि ७ और शेष ४ रहा। ४ ऊपर ९ उतरा तो ४९ विपमाङ्क हुआ। इसमें ७ का वर्ग घटा तो शेष शून्य हुआ। आगे अङ्क नहीं है, अतः क्रिया समाप्त हो गयी, लब्धि के स्थान में २९७ है, अतः यह मूल हुआ। यहाँ २, ९ और ७ के वर्ग घटे हैं। अतः इनको दूना कर एक स्थान वदाकर लिखा और जोड़ा तो $(\frac{297}{\sqrt{88209}})$ ५९४ हुआ। इसका आधा किया तो २९७ मूल के समान हो गया। इसी तरह १००१०००२५ इसका भी वर्गमूल लेने से १०००५ हुआ।

वर्गमूल परिशिष्ट—

(१) नवीन रीति से वर्गमूल का आनयन।

२	$\overset{1}{\underset{1}{\text{८८२०९}}}$	२९७
४९	४८२	
९	४४१	
४४१	४१०९	
	४१०९	
४९	००	
९		
५८		
५८७		

$\overset{1}{\underset{1}{\text{८८२०९}}}$ का वर्गमूल निकालना है, तो पहले विपम अङ्कों पर शून्य का चिह्न लगाने से यह मालूम किया कि ३ अङ्क इसके वर्गमूल में होंगे। अब अन्तिम अङ्क ८ में २ का वर्ग घटा, शेष ४ पर जोड़ा अङ्क ८ और २ उतरा। लब्धि २ को दूना करने से ४ हुआ। ४ से ४८ में भाग देने पर लब्धि ९ को ४ और २ दोनों पर

उतारा। ९ से ४९ को गुणाकर ४८२ में घटाया तो शेष ४१। इस पर जोड़ा अङ्क ० और ९ उतारा। ४९ में ९ जोड़ने से ५८ हुआ। ५८ से ४१० में भाग देने पर लब्धि ७ को २९ और ५८ पर रक्खा। अब ५८७ को ७ से गुणाकर ४१०९ में घटाया तो शेष शून्य रहा, अतः $\overset{1}{\underset{1}{\text{८८२०९}}}$ का वर्गमूल २९७ हुआ।

दूसरा प्रकार—यह है कि जिस संख्या का घन करना हो, उसका पहले भन्त्य अङ्क का घन स्थापित करें, फिर भन्त्य के वर्ग को त्रिगुणित आदिम अङ्क से गुणा कर लिखें। बाद में आदिम अङ्क के वर्ग को त्रिगुणित भन्त्य अङ्क से गुणा कर लिखें। तब आदिम अङ्क के घन को लिखकर सबों का स्थानान्तर के क्रम से योग करने पर घन होता है। यदि अधिक अङ्क होवे तो उन दोनों खण्डों को भन्त्य अङ्क मानकर भागे का एक अङ्क लेकर दो खण्ड कल्पना कर पहली रीति के अनुसार क्रिया करनी चाहिए। इस तरह तबतक क्रिया करनी चाहिए जब तक अङ्क निःशेष हो जाय। वा—आदिम अङ्क से ही क्रिया करने पर घन होता है।

तीसरा प्रकार—जिस राशि का घन करना हो उसको दो टुकड़े कर दोनों टुकड़ों से राशि को गुणा कर फिर तीन से गुणा करें। गुणन फल में दोनों टुकड़ों के घनयोग के जोड़ने से घन होता है। जैसे ३ का घन करना है, तो $3 = 1 + 2$ । अब ३ को १ और २ से गुणा करने पर ६ हुआ। ६ को ३ से गुणा किया १८ हुआ। इसमें १ का घन १ और २ का घन $2 \times 2 \times 2 = 8$, इन दोनों का योग ९ को १८ में जोड़ा तो २७ हुआ। यही ३ का घन है।

चौथा प्रकार—जिस वर्गात्मक संख्या का घन करना हो, उसके वर्गमूल का घन करके, फिर उसका वर्ग करें तो घन होता है। जैसे ४ का घन करने के लिए ४ का वर्गमूल २ का घन ८ है, इसका वर्ग किया तो ६४ हुआ। यही ४ का घन है ॥ १३ ॥

उपपत्ति:—त्रयाणां तुल्याङ्कानां घातो घन इति विशेषगुणनपरिभाषा-
रूपैव। यदि राशिः = रा = अ + क तदा घनपरिभाषया रा^३ = रा × रा × रा =
(अ + क) (अ + क) (अ + क)।

= (अ^३ + २ अ क + क^३) (अ + क) = अ^३ + २ अ^२ क + अ क^२ +
अ^२ क + २ अ क^२ + क^३।

= अ^३ + ३ अ^२ क + ३ अ क^२ + क^३। अस्यावलोकेनैव—‘स्याप्यो-
घनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्ग’ इति पद्यमुपपद्यते।

एवं पूर्वयुक्त्या—रा^३ = अ^३ + ३ अ^२ क + ३ अ क^२ + क^३

$$\text{या } २ र^२ - २ र - र + २ = ०$$

$$\text{या } २ र (र - २) - (र - २) = ०$$

$$\text{या } (२ र - १) (र - २) = ०$$

$$\therefore र = २ । \text{ वा } \frac{१}{२} ।$$

$$\therefore य = २ । \text{ वा } य = ८$$

$$\therefore \text{ वे पद कम से } २, ३, ८$$

वा ८, ३, २ उत्तर ।

इति श्रंखल्यवहारपरिधिष्टम् ।

अथ क्षेत्रव्यवहारः ।

तत्र भुजकोटिकर्णानामन्यतमे ज्ञातेऽन्यतमयोज्ञानाय करणमुत्रं वृत्तद्वयम् ।

दृष्टो बाहुयः स्यात् तत्सर्धिन्यां दिर्गातरो बाहुः ।

अथ चतुरस्रे वा सा कोटिः कीर्त्तिता तज्जैः ॥ १ ॥

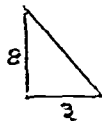
तत्कृत्योर्योगपदं कर्णो दोःकर्णवर्गयोर्विवरान् ।

मूलं कोटिः कोटिश्चुनिकृत्योरन्तरान् पदं बाहुः ॥ २ ॥

अन्ते चतुरस्रे वा दृष्टः बाहुः यः स्यात् । तत्सर्धिन्यां (तदुपरिलम्बरुन्यां) दिशि इतरः बाहुः, सा तज्जैः कोटिः कीर्त्तिता । तत्कृत्योर्योगपदं कर्णः, दोः कर्णयोः वर्गान्तरपदं कोटिः, कोटिश्चुनिकृत्योरन्तरान् पदं बाहुः स्यात् ॥

त्रिभुज या चतुर्भुज में दृष्ट भुज जो हो, उस पर लम्बकर दूसरी भुजा कोटि होती है । उस भुज और कोटि के वर्गयोग का मूल लेने पर कर्ण होता है । कर्णवर्ग में भुजवर्ग को घटाकर मूल लेने से कोटि और कर्ण वर्ग में कोटिवर्ग घटा कर मूल लेने से भुज होता है ॥ २ ॥

न्यासः ।



कोटिः ४ । भुजः ३ । भुजवर्गः ९ ।

कोटिवर्गः १६ । एतयोर्योगान् २५ ।

मूलम् ५ कर्णो जातः ।

उदाहरण—इसका गणित मूल में स्पष्ट है अतः वहाँ नहीं दिया गया ।

प्रकारान्तरेण तच्चान्ताय करणमूत्रं लाघवेत्तम् ।

राश्यान्तरखर्गेण द्विधेने धाने युते तयोः ।

वर्गयोगो भवेदेवं तयोर्योगान्तरादितिः ॥ ३ ॥

वर्गान्तरं भवेदेवं ज्ञेयं सर्वत्र धीमता ।

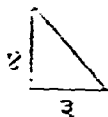
राशयोः द्विधेने धाने तयोः अन्तर खर्गं युते वर्गयोगः भवेत् । तयोः योगान्तरादितिः वर्गान्तरं भवेत् । एवं धीमता सर्वत्र ज्ञेयम् ॥

दो राशियों के अन्तर खर्ग में उन्हीं दो राशियों के द्विगुणित धान खंड देने से उन दोनों राशियों का वर्गयोग होना है और दो राशियों के योगान्तर धान तुरन्त उन राशियों का वर्गान्तर होता है । इसी प्रकार सर्वत्र बुद्धि मानों को ज्ञानता आदिष्ट ।

उपपत्तिः—कल्प्यते वर्गयोगः = व.यो. = अ^२ + क^२ = अ^२ + क^२ = २ अ क + २ अ क = अ^२ - २ अ क + क^२ + २ अ क = (अ - क)^२ + २ अ क अतः उपपद्यते वर्गयोगान्तरम् । यदि वर्गान्तरम् = व.अं = अ^२ - क^२ = अ^२ - क^२ - अ.क - अ.क = अ^२ - अ.क + क^२ - अ.क = अ (अ + क) - क (अ + क) = (अ + क) (अ - क) अतः उपपद्यते सर्वम् ।

कोटिश्चतुष्टयमिति पूर्वोक्तोदाहरणे ।

न्यासः ।



कोटिः ४ । भुजः ३ । अनयोर्धिति १२ ।
द्विधेने २४ । अन्तरखर्गेण १ युते वर्गयोगः
२२ । अस्य मूलं कर्णः ५ ।

अथ कर्णभुजाभ्यां कोट्यन्तरम् ।

न्यासः ।



कर्णः ५ । भुजः ३ । अनयोर्धितिः १५ ।
पुनरेतयोर्नन्तरेण २ हतो वा १६ वर्गा-
न्तरमस्य मूलं कोटिः ४ ।

अस्यासन्नमूलज्ञानार्थमुपायः ।
वर्गेण महतेष्टेन हताच्छेदांशयोर्वधात् ।
पदं गुणपदक्षुण्णच्छिद्भक्तं निकटं भवेत् ॥

छेदांशयोः वधात् महता इष्टेन वर्गेण हतात् पदं गुणपदक्षुण्णच्छिद्भक्तं तदा निकटं (आसन्नमूलं) भवेत् ।

जिस अवर्गाङ्क का मूल निकालना हो, उसे अपने हर से गुणे हुये महान (कल्पित) इष्ट के वर्ग से गुणाकर उसका वर्ग मूल लेवें । बाद में उस मूल को इष्ट गुणित हर से भाग देने पर उस अवर्गाङ्क का मूल होता है ।

इयं वर्गकरणी ३६९ । अस्याः छेदांशघातः १३५२ । अयुतप्रः १३५२००००
अस्यासन्नमूलम् ३६७७ । इदं गुणमूल-: १००) गुणितच्छेदेन (८००)
भक्तं लब्धमासन्नपदम् ४४७७७ । अयं कर्णः । एवं सर्वत्र ।

उदाहरण—अवर्गाङ्क = ३६९ । यहाँ इष्ट माना = १०० । अथ सूत्र के अनुसार इष्टवर्ग (१००००) को (८) हर से गुणा कर अंश (१६९) को गुणा किया तो (१६९ × ८००००) = १३५२०००० यह हुआ । इसका मूल लिया तो ३६७७ हुआ । इस आसन्न मूल (३६७७) को इष्ट गुणित हर से भाग देने पर (३६७७ ÷ ८ × १००) = ४४७७७ यही आसन्न मूल हुआ । आसन्न मूल के लाने में इष्ट जैसे-जैसे बढ़ता जायगा वैसे-वैसे आसन्न मूल उत्तरोत्तर सूक्ष्म होता जायगा । इसलिये सूत्र में महान् इष्ट कल्पना करने की विधि कही गयी है । इसकी युक्ति नीचे उपपत्ति में स्पष्ट की गयी है ।

अत्रोपपत्तिः—कल्प्यतेऽवर्गाङ्कः = $\frac{अ}{क}$

$$\therefore \frac{अ}{क} = \frac{अ \times क \times म \cdot इ^२}{क \times क \times म \cdot इ^२} = \frac{अ \times क \times म \cdot इ^२}{क^२ \times म \cdot इ^२}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{अ}{क}} = \sqrt{\frac{अ \times क \times म \cdot इ^२}{क \times म \cdot इ^२}}, \text{ अत उपपन्नम् ।}$$

अत्र यथा-यथा महदिष्टं कल्प्यते तथा तथाऽऽसन्नमूलं वास्तवमूलासन्नं भवतीति प्रदर्शयते—कल्प्यते अं × छे × इ^२ अस्य वास्तवमूलं = य । आसन्नमूलं = मू, एवं शेषम् = शे ।

परिशिष्ट

समकोण त्रिभुज में यदि कोई दो भुजाएँ ज्ञात हों, तो तीसरी भुजा आयामी से ज्ञानी जा सकती है। इस त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा कर्ण, और दो भुजाएँ कोटि और भुज या लम्ब और आधार कहलाती हैं।

$$\therefore क^2 = को^2 + भु^2 \quad (\text{या, लं}^2 + आ^2)$$

$$\therefore क = \sqrt{को^2 + भु^2} = \sqrt{लं^2 + आ^2}$$

$$लं = \sqrt{क^2 - आ^2}$$

$$\text{और आ} = \sqrt{क^2 - लं^2}$$

उदाहरण—

- (१) एक सीढ़ी किसी घर के सहारे इस तरह लड़ी है, कि वह घर की २४ फीट ऊँची छिड़की तक पहुँच गई है। यदि सीढ़ी की लंबाई, घर के ३२ फीट पर हो, तो सीढ़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

यहाँ सीढ़ी की लंबाई = कर्ण, छिड़की की ऊँचाई = लम्ब (कोटि) और घर की लंबाई से सीढ़ी की लंबाई की दूरी = आधार (भुज)।

$$\therefore क = \sqrt{लं^2 + आ^2} = \sqrt{२४^2 + ३२^2} = \sqrt{५७६ + १०२४} = \sqrt{१६००} = ४० \text{ फीट,}$$

सीढ़ी की लंबाई = ४० फीट, उत्तर।

- (२) किसी नदी के किनारे एक नीतार (बाँध) लड़ा है। यदि नदी की चौड़ाई १२५ फीट, और नीतार की ऊँचाई १०० फीट हों, तो नदी के शीर्ष वृत्तरे किनारे से नीतार की चोटी की दूरी ज्ञात कीजिए।

$$क = \sqrt{लं^2 + आ^2} = \sqrt{१००^2 + १२५^2} = \sqrt{१२५०० + १५६२५} = \sqrt{२८१२५} = १६७ \text{ फीट}$$

\therefore जमीन दूरी = १६७ फीट उत्तर।

- (३) दो बड़ाड़ एक बन्दरगाह से एक ही समय रवाना हुए। उनमें से एक बड़ाड़ की ओर प्रति दिन २४ माइल की गति से और दूसरा बड़ाड़ की ओर प्रति दिन ३२ माइल की गति से चला, तो ६ दिन के बाद दोनों बड़ाड़ों की दूरी ज्ञात कीजिए।

लगाते हैं, तो वह २४ फीट उँचाई तक पहुँचती है, तो सीढ़ी की लम्बाई और गली की चौड़ाई बताओ ।

पहली स्थिति में सीढ़ी उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी समकोण बनाने वाली भुजायें २० फीट और १५ फीट हैं ।

$$\therefore \text{सीढ़ी की लम्बाई} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{400 + 225} \\ = \sqrt{625} = 25 \text{ फीट ।}$$

दूसरी स्थिति में सीढ़ी की लम्बाई, उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी समकोण बनाने वाली भुजायें २४ फीट और दूसरे घर से सीढ़ी की जड़ की दूरी हैं । अतः दूसरे घर से सीढ़ी की जड़ की दूरी

$$= \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7 \text{ फीट ।}$$

$$\therefore \text{गली की चौड़ाई} = 15 + 7 = 22 \text{ फीट ।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

समकोण त्रिभुज का कर्ण बताओ, यदि समकोण बनाने वाली भुजायें निम्न लिखित हों :—

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (१) ५ फीट, १२ फीट | (६) १ फुट ३ इञ्च और १ फुट ८ इञ्च |
| (२) ७ फीट और २४ फीट | (७) २ फीट ९ इञ्च और ३ फीट ८ इञ्च |
| (३) ३० फीट और ४० फीट | (८) १२ गज और ९ गज |
| (४) १ फुट ९ इञ्च और २ फीट ४ इञ्च | (९) २ गज और २ गज २ फीट |
| (५) १ फुट और १ फुट ४ इञ्च | (१०) १२ गज और १६ गज |

(११) किसी गली के एक किनारे एक मकान है और गली के दूसरे किनारे से एक सीढ़ी उस घर के सहारे इस तरह खड़ी है, कि वह उस मकान की ५४ फीट उँचाई तक पहुँचती है । यदि गली की चौड़ाई ७२ फीट हो, तो सीढ़ी की लम्बाई बताओ ।

(१२) एक जहाज किसी बन्दरगाह से ६ माइल प्रति घण्टा की गति से ११ घण्टे तक उत्तर की ओर चलकर, वहाँ से पूर्व की ओर प्रति घण्टा ४ माइल की गति से रवाना हुआ । इस गति से २२ घण्टा चलने के बाद वह जहाज दूसरे बन्दरगाह पर पहुँचा, तो दोनों बन्दरगाह की दूरी बताओ ।

- (२४) एक मीनार की उँचाई ८० फीट है। उसकी चोटी में १०० फीट उँची एक सीढ़ी लगी है, तो मीनार की जड़ से सीढ़ी की जड़ की दूरी बताओ।
- (२५) किसी गली के एक किनारे एक मकान है। गली के ठीक दूसरे किनारे से एक १४५ फीट लम्बी सीढ़ी उस मकान की छत तक पहुँचती है। यदि गली की चौड़ाई ८७ फीट हो, तो छत की उँचाई बताओ।

समद्विबाहुसमकोण त्रिभुज का कर्ण।

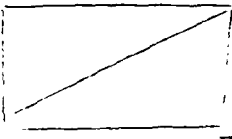
समद्विबाहुसमकोण त्रिभुज में बराबर भुजाओं के बीच का कोण समकोण होता है, अतः उस त्रिभुज का कर्ण = $\sqrt{\text{ल}^2 + \text{ल}^2} = \sqrt{\text{भु}^2 + \text{भु}^2}$
 $= \sqrt{२\text{भु}^2} = \text{भु}\sqrt{२}$

$$\therefore \text{समद्विबाहु त्रिभुज का क} = \sqrt{२\text{भु}}, \dots\dots\dots(१)$$

$$\text{और भु} = \frac{\text{क}}{\sqrt{२}} \dots\dots\dots(२)$$

आयत का कर्ण।

मान लिया कि भ व स द एक आयत है, जिसका कर्ण द व, लम्बाई भ व और चौड़ाई, भ द हैं।



Δ भ व द में \angle द भ व = ९०° , अतः द व = $= \sqrt{\text{भव}^2 + \text{भद}^2}$ या आयत का कर्ण
 $= \sqrt{\text{लम्बाई}^2 + \text{चौड़ाई}^2} \dots\dots\dots(३)$

चूँकि वर्ग भी एक आयत है जिसकी लम्बाई और चौड़ाई बराबर हैं, अर्थात् उसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं अतः वर्ग का कर्ण

$$= \sqrt{\text{लम्बाई}^2 + \text{चौड़ाई}^2} = \sqrt{२\text{लम्बाई}^2} = \sqrt{२\text{चौड़ाई}^2} = \sqrt{२\text{भु}^2}$$

$$= \text{भु}\sqrt{२}। \text{ यदि वर्ग की भुजा} = \text{भु} \text{ और कर्ण} = \text{क} \text{ हो तो}$$

$$\text{क} = \text{भु}\sqrt{२} \dots\dots\dots(४)$$

उदाहरण—

- (१) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजाएँ १५ फीट हैं तो उसका कर्ण बताओ।

$$\text{कर्ण} = \sqrt{२\text{भु}} = \sqrt{२} \times १५ \text{ फीट, उत्तर।}$$